4 16 1/42
N18

ВРЕМЕННИКЪ
ЦЕНТРАЛЬНАГО СТАТИСТИЧЕСКАГО КОМИТЕТА
МИНИСТЕРСТВА ВНУТРЕННИХЪ ДѢЛЪ.
№ 18. 1891.

ОПЫТЪ
ПРИМѢНЕНІЯ ИНТЕРПОЛИРОВАНІЯ
КЪ НѢКОТОРЫМЪ ВОПРОСАМЪ
СТАТИСТИКИ ДВИЖЕНІЯ НАСЕЛЕНІЯ.

ИЗДАНІЕ
ЦЕНТРАЛЬНАГО СТАТИСТИЧЕСКАГО КОМИТЕТА М.В.Д.

Z16 1/42

ВЫПУЩЕНО
ОБЩЕСТВЕННЫЙ ФОНД
Гос. Орд. Труд. Кр. Зн. Публ. Б-ки
им. М. Е. Салтыкова-Щедрина

БИБЛИОТЕКА
ЛЕНИНГР. УПРАВЛ.
Нар. Хоз. Учета

Z16 1/42

ВРЕМЕННИКЪ
ЦЕНТРАЛЬНАГО СТАТИСТИЧЕСКАГО КОМИТЕТА
МИНИСТЕРСТВА ВНУТРЕННИХЪ ДѢЛЪ.
№ 18. 1891.

5084/8

ОПЫТЪ ПРИМѢНЕНІЯ ИНТЕРПОЛИРОВАНІЯ КЪ НѢКОТОРЫМЪ ВОПРОСАМЪ СТАТИСТИКИ ДВИЖЕНІЯ НАСЕЛЕНІЯ.

5068.3

Составилъ старшій редакторъ Центральнаго Статистическаго Комитета

П. В. ОХОЧИНСКІЙ.

БИБЛИОТЕКА
ЛЕНИНГР. УПРАВЛ.
Нар. Хоз. Учета

Изданіе
ЦЕНТРАЛЬНАГО СТАТИСТИЧЕСКАГО КОМИТЕТА
МИНИСТЕРСТВА ВНУТРЕННИХЪ ДѢЛЪ.

Народного Хозяйства

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
1891.

Государств. публичная
историческая
библиотека РСФСР
370800

Издавая настоящее изслѣдованіе старшаго редактора П. В. Охочинскаго, Центральный Статистическій Комитетъ имѣетъ въ виду, что выведенныя авторомъ формулы могутъ оказаться полезными при изученіи явленій движенія населенія, давая возможность вычислять такія группы умершихъ, которыя отсутствуютъ въ нашей статистикѣ, а между тѣмъ представляютъ теоретическій и практическій интересъ.

Предлагаемая работа была приготовлена къ печати еще въ минувшемъ 1890 году, но рядъ неотложныхъ текущихъ занятій Комитета не позволилъ до сихъ поръ закончить ея печатаніе. Этимъ обстоятельствомъ объясняется отсутствіе указаній въ текстѣ относительно вышедшихъ въ концѣ прошлаго года сочиненій—(*Harald Westergaard.* Die Grundzüge der Theorie der Statistik. Iena. 1890 и *В. Борткевичъ.* Смертность и долговѣчность мужскаго православнаго населенія Европейской Россіи. Записки Императорской Академіи Наукъ. Т. 63. 1890—въ которыхъ хотя и не рѣшается задача объ опредѣленіи всякаго рода совокупностей умершихъ, но предлагаются для интерполированія разнообразныхъ статистическихъ данныхъ нѣкоторыя изъ приводимыхъ въ этой статьѣ формулъ.

Къ настоящей работѣ приложено шесть чертежей.

---

10 Января 1891.

Обстоятельное изслѣдованіе порядка вымиранія всего населенія какой либо страны или разныхъ группъ его прежде всего требуетъ наличности такого статистическаго матеріала, въ которомъ всѣ смертные случаи распредѣлялись бы не только по возрасту умершихъ, но вмѣстѣ съ тѣмъ по времени смерти послѣднихъ и времени ихъ рожденія. Лишь съ помощью подобныхъ данныхъ, при надлежащемъ комбинированіи ихъ со свѣдѣніями о выселившихся и вселившихся, мы можемъ, во первыхъ, находить во всякое время и для всякаго возраста точную вѣроятность смерти, а во вторыхъ—опредѣлять вліяніе на смертность не только возраста, но и тѣхъ временныхъ условій, которыя имѣли мѣсто какъ въ эпоху смерти, такъ и въ эпоху рожденія данныхъ лицъ.

До сихъ поръ, однако, указанная обработка данныхъ о смертныхъ случаяхъ встрѣчается далеко не вездѣ, и большею частью умершіе сводятся въ итоги только по двумъ кореннымъ признакамъ, именно по времени смерти и возрасту. Примѣненіе такихъ итоговъ къ рѣшенію главнаго вопроса статистики смертности—къ опредѣленію вѣроятности смерти въ разныхъ возрастахъ—затрудняется тѣмъ обстоятельствомъ, что нельзя съ точностью найти число живыхъ или родившихся, къ которому данный итогъ умершихъ долженъ быть отнесенъ. Если бы свѣдѣнія объ умершихъ давались по каждому случаю отдѣльно—отсутствіе указаній о времени рожденія не составляло бы еще препятствія для рѣшенія поставленной задачи. Вычитая изъ времени смерти каждаго лица его возрастъ, мы нашли бы время его рожденія, а затѣмъ, идя обратнымъ путемъ, могли бы опредѣлить и то число умершихъ, которое дали для извѣстнаго возраста родившіеся извѣстнаго времени. Но разъ мы имѣемъ въ своемъ распоряженіи не отдѣльные случаи, а цѣлыя совокупности умершихъ, характеризуемыя какими нибудь предѣлами времени смерти и возраста, дѣло измѣняется, и точное опредѣленіе искомой вѣроятности является невозможнымъ.

Чтобы пояснить сказанное на конкретномъ примѣрѣ, положимъ, что намъ дана группа младенцевъ, умершихъ въ 1889 году въ возрастѣ отъ рожденія до одного года. Въ составъ этой группы входятъ, во первыхъ, младенцы, которые умерли въ самомъ началѣ 1889 года въ возрастѣ одного года и, слѣдовательно, родились въ самомъ началѣ предыдущаго 1888 года, а во вторыхъ—младенцы, которые и родились и умерли сейчасъ же послѣ рожденія въ самомъ концѣ даннаго 1889 г. Между моментами рожденій младенцевъ этихъ двухъ разрядовъ падаютъ моменты рожденій всѣхъ остальныхъ младенцевъ разсматриваемой группы, и такимъ образомъ полный

промежутокъ времени рожденія для нея охватываетъ два года—1888 и 1889. Другими словами, въ составъ группы входятъ въ неизвѣстной пропорціи умершіе изъ двухъ годовыхъ серій родившихся, и понятно, что при подобномъ смѣшанномъ составѣ группы мы не можемъ, для вывода вѣроятности смерти, относить ее ни къ родившимся одного года, ни къ родившимся другого.

Формальное разграниченіе разныхъ группъ живыхъ и умершихъ и установленіе между ними взаимныхъ соотношеній было впервые произведено съ надлежащею полнотою *Г. Ф. Кнаппомъ* въ его замѣчательномъ трудѣ „Объ опредѣленіи смертности изъ показаній статистики населенія“, появившемся въ 1868 году и проложившемъ новые пути въ этой области статистическихъ изслѣдованій *). Результаты его изысканій съ тѣхъ поръ нашли уже практическое примѣненіе въ иностранной статистикѣ, и обработка матеріала по статистикѣ смертности ведется въ нѣкоторыхъ странахъ, какъ напримѣръ, въ Пруссіи, Норвегіи, Голландіи, Италіи, согласно изложеннымъ въ этой книгѣ требованіямъ.

Но эти частныя улучшенія касаются пока небольшого промежутка времени, и потому новыя данныя не могутъ имѣть еще обширнаго приложенія. Громадная же масса матеріала какъ прежде повсемѣстно собраннаго, такъ и собираемаго нынѣ во многихъ государствахъ, въ томъ числѣ и въ Россіи, дается только въ видѣ выше указанныхъ итоговъ. Для вычисленія при помощи этого матеріала нормальныхъ таблицъ смертности были уже предложены нѣкоторые пріемы. Но насколько намъ извѣстно, до сихъ поръ еще не сдѣлано попытки находить посредствомъ имѣющихся итоговъ какую угодно совокупность умершихъ, чтобы имѣть такимъ образомъ возможность рѣшать всякаго рода задачи связанныя съ данными о смертности. Конечно, подобныя интерполированныя величины могутъ быть только болѣе или менѣе приблизительными, но во многихъ случаяхъ и приблизительныя показанія представляютъ интересъ и значеніе.

Занявшись этимъ вопросомъ, мы пришли къ выводамъ, которые показались намъ заслуживающими вниманія. Но прежде, чѣмъ перейти къ сообщенію примѣненнаго нами способа и полученныхъ результатовъ, необходимо выяснить главныя группы, въ которыя можетъ укладываться цифровой матеріалъ объ умершихъ и живыхъ. Всѣ выведенныя ниже основанія формальной теоріи движенія населенія изложены вполнѣ элементарнымъ и вмѣстѣ съ тѣмъ наглядным путемъ, причемъ мы руководствовались главнымъ образомъ трудами *Беккера* **) и *Лексиса* ***).

---

*) *Knapp G. F.* Ueber die Ermiettlung der Sterblichkeit aus den Aufzeichnungen der Bevölkerungs-Statistik. Leipzig. 1868.

**) *Becker K.* Zur Berechnung von Sterbetafeln an die Bevölkerungsstatistik zu stellende Anforderungen. Трудъ этотъ помѣщенъ въ „Mémoires de la Commission permanente du Congrès International de Statistique. St. Petersbourg. 1876.

***) *Lexis* W. Einleitung in die Theorie des Bevölkerungswechsels. Leipzig. 1875.

I.

§ 1. Каждый живой индивидуумъ можетъ быть отличенъ отъ всякаго другого моментомъ его рожденія и тѣмъ возрастомъ, какого онъ достигаетъ въ моментъ наблюденія. Равнымъ образомъ и каждый умершій можетъ быть опредѣленъ моментомъ его рожденія и возрастомъ въ моментъ смерти. Если обозначимъ черезъ x время рожденія и черезъ y возрастъ, который имѣетъ лицо въ моментъ наблюденія t, то эти три перемѣнныя величины связаны между собою, очевидно, слѣдующимъ уравненіемъ:

$$t=x+y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Изъ этого уравненія, зная двѣ величины, всегда можно вывести третью, такъ что для отличія одного лица отъ другого достаточно имѣть два признака, то есть, или время рожденія и возрастъ, или время наблюденія и возрастъ, или наконецъ время рожденія и время наблюденія

Положимъ теперь, что въ какомъ нибудь мѣстѣ мы ведемъ постоянную регистрацію случаевъ рожденія и смерти, отмѣчая относительно каждаго родившагося время его рожденія, а относительно каждаго умершаго еще и другой опредѣляющій признакъ. Возьмемъ двѣ взаимно перпендикулярныя оси OX и OY (черт. I), и по первой изъ нихъ будемъ считать отъ начала координатъ O время, а по второй отъ того же начала — возрастъ. Въ точкахъ линіи OX, соотвѣтствующихъ моментамъ рожденія регистрируемыхъ лицъ проведемъ линіи aa', bb', cc', dd'..... паралельныя OY, и на каждой изъ нихъ отложимъ длину, равную возрасту, прожитому даннымъ лицомъ отъ рожденія до его смерти. Эти линіи будемъ называть *линіями жизни.*

§ 2. Если въ какой либо моментъ времени t' мы станемъ наблюдать оставшихся въ живыхъ, то очевидно, что всякое лицо, родившееся въ этотъ самый моментъ t', будетъ имѣть возрастъ нуль, всякое лицо, родившееся въ моментъ x_1 ровно за годъ до момента t', будетъ имѣть возрастъ одного года, изображаемый линіею x_1x_1', всякое лицо, родившееся

въ моментъ x_2 ровно за два года до момента t', будетъ имѣть возрастъ, изображаемый линіею x_2x_2', и т. д. Соединивъ точки x_1', x_2', x_3'... съ точкою t', мы получимъ прямую линію tt'_1, которая пересѣчетъ не только линіи жизни указанныхъ индивидуумовъ, но вообще всѣ линіи жизни въ точкахъ, соотвѣтствующихъ тѣмъ возрастамъ, какіе имѣютъ разсматриваемыя лица въ моментъ наблюденія t'. Такимъ образомъ пересѣченія линіи tt'_1 съ линіями жизни представляютъ намъ индивидуумовъ, находящихся на лицо въ данныхъ возрастахъ въ моментъ t' или *современниковъ* (Gleichzeitige). Если мы будемъ наблюдать все населеніе какой либо страны, то число этихъ пересѣченій дастъ намъ полный итогъ населенія, живущаго во время t', то есть то, что дала бы намъ перепись, произведенная въ это время.

Проведя линію $t''t''_1$, параллельную $t't'_1$ и соотвѣтствующую моменту наблюденія t'', мы подобнымъ же образомъ найдемъ, что число точекъ пресѣченія линіи $t''t''_1$ съ линіями жизни представитъ число современниковъ въ моментъ t'' и т. д. Линіи $t't'_1$, $t''t''_1$ и пр. называются *линіями времени*.

§ 3. Если черезъ точку оси OY, соотвѣтствующую возрасту y' проведемъ *линію возраста* $y'y'_1$, параллельную оси OX, то ея пересѣченія съ линіями жизни дадутъ намъ число лицъ, которое послѣдовательно одинъ за другимъ, то есть въ разное время, достигаютъ возраста y'. Точки пересѣченія линію возраста $y''y''_1$, дадутъ намъ подобнымъ же образомъ число лицъ, достигающихъ возраста y'' и т. д. Получаемыя такимъ путемъ группы совершенно отличны отъ разсмотрѣнныхъ выше и представляютъ *сверстниковъ* (Gleichaltrige), доживающихъ до извѣстнаго возраста. Опредѣлить съ точностью эти группы можно только посредствомъ постоянной регистраціи подлежащихъ случаевъ на подобіе того, какъ нынѣ собираются свѣдѣнія о родившихся, которые представляютъ одну изъ частныхъ группъ сверстниковъ, именно лицъ доживающихъ до возраста нуль. Но вслѣдствіе практическихъ затрудненій, связанныхъ съ этимъ дѣломъ, регистрація сверстниковъ (за исключеніемъ родившихся) не ведется ни въ одной странѣ, и въ случаѣ надобности искомые итоги приходится опредѣлять косвеннымъ путемъ на основаніи вычисленій.

§ 4. Такъ какъ тремъ перемѣннымъ въ уравненіи $t=x+y$ соотвѣтствуютъ три системы параллельныхъ линій—линіи жизни, линіи возраста и линіи времени, и такъ какъ съ другой стороны—линіи жизни могутъ пересѣкаться или съ линіями возраста или съ линіями времени, то иныхъ категорій живыхъ, кромѣ сверстниковъ и современниковъ, не существуетъ. Ни одна изъ этихъ категорій не можетъ быть опредѣлена на основаніи другой, ибо, очевидно, лица, имѣющія разный возрастъ, не могутъ совпадать съ лицами одного возраста, или живущія въ одно время съ живущими въ разныя времена.

Если дано время наблюденія современниковъ или возрастъ, котораго достигаютъ

сверстники, то, чтобы вполнѣ опредѣлить каждую категорію, намъ нужно еще знать промежутокъ времени, въ теченіе котораго родились разсматриваемыя лица, для чего должны быть извѣстны два его предѣла—низшій и высшій. Эти предѣлы могутъ быть или даны непосредственно, или же, вмѣсто того, указанныя два предѣльныя значенія другихъ признаковъ, такъ что въ послѣднемъ случаѣ требуемые предѣлы найдутся при помощи извѣстныхъ величинъ изъ уравненія $t=x+y$. Такимъ образомъ для полной характеристики любой группы живущихъ надо имѣть три величины, изъ которыхъ время наблюденія или возрастъ опредѣляютъ принадлежность группѣ къ тому или другому разряду живущихъ, а остальныя двѣ служатъ для опредѣленія времени рожденія ея членовъ.

Означая черезъ x', x'' низшій и высшій предѣлы времени рожденія, черезъ y', y'' низшій и высшій предѣлы возраста, а черезъ t какой-либо моментъ времени, мы, на основаніи сказаннаго, получимъ всевозможныя группы или совокупности (Gesammtheiten) современниковъ, живущихъ во время t, если для опредѣленія времени рожденія будемъ брать какія либо двѣ изъ четырехъ величинъ

$$x',\ x'',\ y',\ y''.$$

Такихъ двойныхъ комбинацій можетъ быть найдено шесть. Присоединяя къ каждой комбинаціи изъ двухъ буквъ еще букву t, мы найдемъ, что всевозможныя совокупности современниковъ будетъ опредѣляться слѣдующими признаками:

$$1)\ x'x''t;\ 2)\ y'y''t;\ 3)\ x'y't;\ 4)\ x''y''t;\ 5)\ x'y''t;\ 6)\ x''y't.$$

Подобнымъ же образомъ, означая черезъ t', t'' низшій и высшій предѣлы времени наблюденія, а черезъ y—любой возрастъ и дѣлая двойныя комбинаціи изъ четырехъ величинъ

$$x',\ x'',\ t',\ t'',$$

мы, по присоединеніи къ каждой комбинаціи буквы y, найдемъ слѣдующія шесть совокупностей сверстниковъ:

$$1)\ x'x''y;\ 2)\ t't''y;\ 3)\ x't'y;\ 4)\ x''t'y;\ 5)\ x't''y;\ 6)\ x't''y.$$

§ 5. Первая совокупность современниковъ представляетъ лицъ, которыя родились во время отъ x' до x'' и находятся въ живыхъ во время t; напримѣръ, находящихся въ живыхъ въ началѣ 1890 года изъ родившихся отъ 1870 до 1880 года. Графически (черт. I) она изображается числомъ пересѣченій линій жизни, заключающихся въ промежуткѣ между временами x' и x'' съ линіею tt_1, то есть числомъ пересѣченій линій жизни съ линіею hh_1.

Вторая совокупность даетъ современниковъ, которые имѣютъ возрастъ отъ y' до y'' во время t, напримѣръ, имѣющихъ отъ 5 до 10 лѣтъ въ началѣ 1890 года. На чертежѣ она будетъ дана числомъ пересѣченій линій жизни съ линіею tt_1 на протяженіи kk_1.

Затѣмъ третья совокупность представляетъ тѣхъ живущихъ, которые родились *послѣ* времени x' и имѣютъ возрастъ *бо́льшій* y' во время t, и изображается числомъ пересѣченій линій жизни съ линіей tt_1 на протяженіи kh_1, а четвертая—тѣхъ, которые родились *до* времени x'' и находятся въ во время t возрастахъ *меньшихъ* y'' и изображается числомъ пересѣченій линій жизни съ линіей tt_1 на протяженіи hk_1.

Наконецъ двѣ послѣднія совокупности являются частными случаями выше разсмотрѣнныхъ группъ, а именно, пятая представляетъ живыхъ, которые, родившись *послѣ* времени x', имѣютъ въ моментъ t возрастъ *не бо́льшій* y'', то есть, всѣхъ тѣхъ, которые во время t находятся въ возрастахъ отъ нуля до y'' (на чертежѣ дается числомъ пересѣченій линій жизни съ линіей tt_1 на протяженіи tk_1); шестая же—лицъ, родившихся *до* времени x' и *перешедшихъ* уже возрастъ y' во время t, то есть тѣхъ, которые во время t находятся въ возрастахъ отъ y' до ω, разумѣя подъ ω высшій достижимый человѣкомъ возрастъ (графически дается пересѣченіями линіи жизни съ линіею ht_1 продолженной въ сторону t_1 до предѣловъ человѣческой жизни).

§ 6. Изъ группъ сверстниковъ первая совокупность представляетъ живыхъ, которые, родившись въ теченіе времени отъ x' до x'', достигаютъ возраста y; напримѣръ тѣхъ, которые родились отъ 1870 до 1880 года и достигли возраста 10 лѣтъ. На чертежѣ эта совокупность изображается числомъ пересѣченій линій жизни, заключающихся въ промежуткѣ между временами x' и x'' съ линіей yy_1, то есть числомъ пересѣченій линіи жизни съ линіей ll_1.

Вторая совокупность даетъ лицъ, которыя достигаютъ возраста y въ продолженіе времени отъ t' до t'', напримѣръ достигающихъ возраста 10 лѣтъ во время отъ 1880 до 1890 года. Графически она изобразится пересѣченіями линій жизни съ линіею yy_1 на протяженіи m_1m.

Третья совокупность даетъ живыхъ, которые, родившись *послѣ* времени x', достигаютъ возраста y *до* наступленія времени t'', а четвертая — живыхъ, которые родились *до* времени x'' и достигаютъ возраста y *послѣ* времени t' (на графикѣ онѣ представляются какъ число пересѣченій линій жизни съ линіями l_1m и lm_1).

Что касается до совокупностей пятой и шестой, то первая изъ нихъ представляетъ лицъ, которыя, родившись *послѣ* времени x', достигаютъ возраста y во все послѣдующее за моментомъ t' время, а вторая— лицъ, родившихся *до* времени x'' и достигающихъ возраста y во все предшествующее наступленію момента t'' время. Такимъ образомъ объ совокупности не имѣютъ вполнѣ опредѣленнаго характера. На чертежѣ онѣ изображаются числомъ пересѣченій, которыя дѣлаетъ съ линіями жизни неопредѣленно продолженныя вправо и влѣво линіи m_1y_1 и my.

§ 7. Изображая буквою V живыхъ, мы можемъ любую совокупность ихъ обозначить приставкою къ буквѣ V индексовъ, которые характеризуютъ данную совокупность по времени рожденія, времени наблюденія и возрасту составляющихъ ее лицъ. Условимся ставить внизу и слѣва V время рожденія, внизу и справу—возрастъ, а вверху и слѣва—время наблюденія, раздѣляя чертою нисшій и высшій предѣлы каждаго изъ признаковъ (напримѣръ x'/x'', y'/y'' и т. д.). Если будетъ данъ одинъ только нисшій предѣлъ или одинъ только высшій, то мы все же будемъ сохранять черту позади или впереди соотвѣтствующаго предѣла, чтобы показать направленіе, въ которомъ ведется счетъ. Въ этомъ случаѣ $x'/$, $/x''$, $t'/$, $/t''$ и пр. будутъ означать живыхъ изъ родившихся *послѣ* времени x' или *до* времени x'', живыхъ *послѣ* времени t' или *до* времени t'' и т. п. Что же касается до тѣхъ признаковъ, которые выражаютъ не *промежутки* времени или возраста, а лишь *моменты* этихъ величинъ, какъ, напримѣръ, живущіе въ моментъ t или достигающіе возраста y, то буквы, обозначающія такіе признаки, мы будемъ ставить на соотвѣтствующемъ мѣстѣ, не снабжая ихъ ни значками, ни чертою.

При такомъ обозначеніи наши совокупности приводятся къ слѣдующему виду (мы исключаемъ послѣднія пары каждой категоріи, какъ не представляющія особаго интереса):

Современники.	Сверстники.
${}^{t}_{x'/x''}V$	${}_{x'/x''}V_{y}$
${}^{t}V_{y'/y''}$	${}^{t'/t''}V_{y}$
${}^{t}_{x'/}V_{y'/}$	${}^{/t''}_{x'/}V_{y}$
${}^{t}_{/x''}V_{/y''}$	${}^{t'/}_{/x''}V_{y}$

§ 8. Въ каждой совокупности какъ современниковъ, такъ и сверстниковъ можно одни признаки замѣнять другими при помощи уравненія

$$t = x + y,$$

и такимъ образомъ разъяснять взаимную связь между частными совокупностями каждой категоріи. При этомъ нужно принять во вниманіе, что для сверстниковъ, достигающихъ одного и того-же возраста y въ разныя времена t, нисшій предѣлъ времени наблюденія t' будетъ опредѣляться самымъ меньшимъ значеніемъ суммы $x + y$, а высшій предѣлъ t''—самымъ большимъ значеніемъ этой суммы. Означая черезъ x' и x'' нисшій и высшій предѣлы времени рожденія, мы, на основаніи сказаннаго, имѣемъ

$$\left.\begin{aligned} t' &= x' + y \\ t'' &= x'' + y \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (a)$$

Разсуждая подобнымъ же образомъ относительно современниковъ, имѣющихъ въ данное время t разные возрасты, мы найдемъ, что самый меньшій ихъ возрастъ будетъ равняться наименьшему значенію разности $t - x$, а самый большій—наибольшему значенію той-же разности, то есть

$$\left.\begin{aligned} y' &= t - x'' \\ y'' &= t - x' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (b)$$

Легко также убѣдиться, что низшіе и высшіе предѣлы времени рожденія будутъ для современниковъ соотвѣтственно равны:

$$\left.\begin{aligned} x' &= t' - y \\ x'' &= t'' - y \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (c)$$

$$\left.\begin{aligned} x' &= t - y'' \\ x'' &= t - y' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (d)$$

Если, напримѣръ, мы имѣемъ совокупность ${}_{x'/x''}{}^{t}V$ и желаемъ вмѣсто времени рожденія взять какъ опредѣляющій признакъ возрастъ, то есть найти совокупность ${}^{t}V_{y'/y''}$, которая изображала-бы тѣхъ-же самыхъ индивидуумовъ, то въ равенствѣ

$${}_{x'/x''}V = {}^{t}V_{y'/y''}$$

нужно, на основаніи соотношенія (b) поставить $t - x''$ вмѣсто y' и $t - x'$ вмѣсто y''. Такимъ образомъ получимъ:

$${}_{x'/x''}{}^{t}V = {}^{t}V_{t-x''/t-x'}$$

Замѣняя при помощи уравненій (a), (b) (c) и (d) въ каждой совокупности сверстниковъ и современниковъ одни признаки другими, мы найдемъ слѣдующія соотношенія между разными совокупностями каждой категоріи:

Современники:

$$\begin{aligned} {}_{x'/x''}{}^{t}V = {}^{t}V_{t-x''/t-x'} = {}_{x'_1}{}^{t}V_{t-x''_1} = {}_{/x''}{}^{t}V_{/t-x'} \quad \ldots\ldots \\ {}^{t}V_{y'/y''} = {}_{t-y''/t-y'}{}^{t}V = {}_{t-y''/}{}^{t}V_{y'/} = {}_{/t-y'}{}^{t}V_{/y''} \quad \ldots\ldots \end{aligned} \qquad (1)$$

и т. д.

Сверстники:

$$x'x''V_y = {}^{x'+y|x''+y}V_y = {}^{|x''+y}_{x'|}V_y = {}^{x'+y|}_{|x''}V_y \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$t'|t''V_y = {}_{t'-y|t''-y}V_y = {}^{|t''}_{t'-y|}V_y = {}_{|t''-y}^{t'|}V_y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (2)$$

и т. д.

§ 9. Въ графическомъ изображеніи, употребленномъ нами, каждый индивидуумъ означается прямою линіею, проведенною перендикулярно къ оси OX и равною по длинѣ возрасту, который прожитъ лицомъ отъ его рожденія до смерти. Всякая линія жизни, пересѣкающаяся съ линіями даннаго возраста или даннаго времени, представляетъ лицо, находящееся еще въ живыхъ въ разсматриваемомъ возрастѣ или въ разсматриваемое время; всякая же линія жизни, не доходящая до пересѣченія съ данными линіями возраста или времени, представляетъ лицо, уже умершее до достиженія данныхъ терминовъ. Если мы проведемъ двѣ линіи возраста или двѣ линіи времени и для какого-либо промежутка времени рожденія сосчитаемъ число линій жизни, оканчивающихся между взятыми предѣлами, то это число дастъ контингентъ лицъ, которыя, пережившъ нижнюю границу, умерли, не доживъ до верхней, то есть, число умершихъ въ промежуткѣ между двумя возрастами или двумя моментами времени. Иначе говоря, разсматриваемая группа умершихъ изобразится какъ число нѣкоторыхъ точекъ—концовъ линій жизни—распредѣленныхъ на извѣстнаго рода площади.

Отъ очертанія этой площади зависитъ тотъ или другой видъ группы умершихъ. Въ нашемъ случаѣ площадь можетъ ограничиваться только прямыми линіями, именно, двумя линіями жизни, двумя линіями возраста и двумя линіями времени, и всѣ виды площадей мы получимъ, произведя различныя многозначныя комбинаціи изъ шести величинъ $x', x'', y', y'', t', t''$, соотвѣтствующихъ низшимъ и высшимъ предѣламъ трехъ указанныхъ признаковъ.

§ 10. Самая общая совокупность умершихъ получится, если мы ограничимъ площадь всѣми шестью линіями. Такъ какъ изъ шести величинъ, беря ихъ всѣ заразъ, можно сдѣлать только одну комбинацію ($x'\ x''\ y'\ y''\ t'\ t''$), то шестизначную группу умершихъ мы найдемъ только одну. На чертежѣ (черт. II) она изобразится шестиугольникомъ ebmgdn *), образованнымъ взаимнымъ пересѣченіемъ линій $x'x'_1$, $x''x''_1$, $y'y'_1$, $y''y''_1$, $t't'_1$, $t''t''_1$, и представляетъ число умершихъ, которые родились въ промежуткѣ времени отъ x' до x'' и умерли въ возрастѣ отъ y' до y'' въ теченіе времени отъ t' до t''.

*) Для ясности мы изображаемъ на чертежѣ только необходимыя линіи.

Народный Архив

§ 11. Дѣлая комбинаціи по пяти буквъ, мы получимъ пятизначныя группы умершихъ. Такихъ группъ можетъ быть найдено шесть, именно:

1) $x'x''y'y''t$ 3) $x'x''t't''y'$ 5) $y'y''t't''x'$

2) $x'x''y'y''t''$ 4) $x'x''t't''y''$ 6) $y'y''t't''x''$

Первыя двѣ комбинаціи выражаютъ группы умершихъ, различающіяся тѣмъ, что одна изъ нихъ представляетъ тѣхъ, которые родились во время отъ x' до x'' и, находясь въ возрастѣ отъ y' до y'', умерли *по прошествіи* времени t', а другая—подобнымъ же образомъ опредѣляемыхъ лицъ, но умершихъ *до наступленія* времени t''. Затѣмъ двѣ группы второй пары даютъ число смертныхъ случаевъ, происшедшихъ въ теченіе времени отъ t' до t'' изъ родившихся отъ x' до x'' *послѣ достиженія* послѣдними возраста y' или *до достиженія* ими возраста y''. Наконецъ двѣ группы третьей пары представляютъ умершихъ въ возрастѣ отъ y' до y'' въ теченіе времени отъ t' до t'' изъ родившихся *по прошествіи* времени x' или *до наступленія* времени x''. Графически (черт. II) разсмотрѣнныя группы изображаются какъ число линій жизни, оканчивающихся въ пятиугольникахъ: *dcben*, *abmgd*, *ebmln*, *dgmkn*, *efgdn*, *bmghe*.

§ 12. Четырехзначныхъ комбинацій изъ пяти элементовъ можетъ быть образовано пятнадцать. Эти комбинаціи, разбитыя на три категоріи, слѣдующія:

1) $x'x''y'y''$
2) $x'x''t't''$
3) $y'y''t't''$
} . . . . (I)

1) $x'x''y't''$
2) $x'x''y''t$
3) $y'y''x't''$
4) $y'y''x''t$
5) $t't''x'y'$
6) $t't''x''y'$
} . . . (II)

1) $x'x''y't$
2) $x'x''y''t'$
3) $y'y''x't'$
4) $y'y''x''t'$
5) $t't''x'y''$
6) $t't''x''y'$
} . . . (III)

Три совокупности первой категоріи являются на чертежѣ (черт. II) въ видѣ параллелограммовъ, а именно: первая, дающая число умершихъ въ возрастѣ отъ y' до y'' изъ родившихся въ теченіи времени отъ x', до x'' въ видѣ параллелограмма *abcd*; вторая, которая выражаетъ число умершихъ въ теченіе времени отъ t' до t'' изъ родившихся во время отъ x' до x''— въ видѣ параллелограмма *nklm* и наконецъ третья, представляющая число умершихъ въ возрастѣ отъ y' до y'' въ теченіе времени отъ t' до t'', въ видѣ параллелограмма *efgh*. Эти три совокупности называются *главными совокупностями* (Hauptgesammtheiten). Шесть совокупностей второй категоріи, называемыя *побочными совокупностями* (Nebengesammtheiten), соотвѣтственно имѣютъ видъ трапецій *abml*,

dclm, *adgf*, *bche*, *efln* и *gmkh* и выражаютъ: первая—число смертныхъ случаевъ между родившимися во время отъ x' до x'', имѣвшихъ мѣсто *до наступленія* времени t' и *по достиженіи* умершими возраста y'; вторая — число смертныхъ случаевъ между родившимися во время отъ x' до x'', имѣвшихъ мѣсто *до достиженія* умершими возраста y'', но *послѣ наступленія* времени t' и т. д.

Что касается до шести группъ третьей категоріи, то онѣ представляютъ на чертежѣ или не замкнутыя со всѣхъ сторонъ фигуры, или же, имѣя границами естественные предѣлы человѣческой жизни, то есть возрасты нуль и ω, являются какъ частные случаи другихъ совокупностей. Къ такимъ частнымъ совокупностямъ относятся группы первая, вторая, пятая и шестая (напримѣръ, $x'_1x''_1lm$, $x'x''nk$, $t't''km$ и $nlt_1't_1''$). Группы же третья и четвертая не имѣютъ опредѣленныхъ границъ ни со стороны времени рожденія ни стороны времени наблюденія (напримѣръ, $gfy_1'y_1''$ и $ehy'y''$).

§ 13. Наименьшее число прямыхъ линій, которыми можетъ замыкаться площадь, равно тремъ, а потому наименьшее число признаковъ, которыми вполнѣ можетъ опредѣляться совокупность умершихъ, есть тоже три. Всѣхъ трехзначныхъ комбинацій изъ шести данныхъ величинъ можно составить двадцать, а именно:

1) $x'y't''$		1) $x'x''y'$	7) $y'y''t'$	13) $x'y't'$
2) $x''y''t$	. . . . (I)	2) $x'x'y''$	8) $y'y''t''$	14) $x'y''t''$
		3) $x'x''t'$	9) $t't''x'$	15) $x'y''t'$
		4) $x'x''t''$	10) $t't''x''$	16) $x'y't''$ . . . . (II)
		5) $y'y''x'$	11) $t't'y'$	17) $x'y''t''$
		6) $y'y''x''$	12) $t't''y''$	18) $x''y't'$

Анализируя эти комбинаціи, легко убѣдиться, что только двѣ изъ нихъ $x'y't''$ и $x''y''t'$ представляютъ на чертежѣ замкнутыя тремя линіями фигуры или треугольники; всѣ же прочія частью могутъ быть сведены на разсмотрѣнныя выше, частью же даютъ фигуры открытыя съ одной стороны, а потому соотвѣтствующія группы умершихъ не имѣютъ опредѣленной величины. Изъ двухъ указанныхъ совокупностей одна—$x'y't''$ представляетъ лицъ, которыя, родившись *послѣ* даннаго времени x', умерли *послѣ* достиженія даннаго возраста y', но *до* наступленія даннаго времени t'', и называется *первою основною совокупностью* (Erste Grundgesammtheit), а другая—$x''y''t'$ представляетъ лицъ, которыя, родившись *до* наступленія даннаго времени x'', умерли *послѣ* наступленія даннаго времени t' *не достигнувъ* даннаго возраста y'', и носитъ названіе *второй основной совокупности* (Zweite Grundgesammtheit). На чертежѣ эти совокупности соотвѣтственно изображаются треугольниками afl и hck.

§ 14. Между всѣми совокупностями особаго вниманія заслуживаютъ какъ въ теоретическомъ, такъ въ практическомъ отношеніи *три главныя совокупности* и *двѣ основныя.*

Означая умершихъ буквою M и сохраняя прежнюю систему индексовъ (§ 7), мы можемъ главныя и основныя совокупности представить въ слѣдующемъ видѣ:

Главныя совокупности:

I. $x'.x''M_{y'/y''}$

II. $\overset{t'/t''}{x'\ x''}M$

III. $\overset{t'/t''}{}M_{y'/y''}$

Основныя совокупности:

I. $\overset{/t''}{x'/}M_{y'/}$

II. $\overset{t'/}{/x''}M_{/y''}$

Оба отсутствующіе предѣла какого либо признака, или же одинъ изъ нихъ, могутъ быть опредѣлены на основаніи уравненій, выражающихъ общую зависимость между временемъ рожденія, возрастомъ и временемъ смерти:

$$t = x + y$$

$$x = t - y$$

$$y = t - x$$

Нисшіе и высшіе предѣлы найдутся, когда въ эти уравненія будутъ вставлены тѣ изъ извѣстныхъ величинъ, которыя даютъ наименьшее или наибольшее значеніе для t, для x и для y, какъ это уже разъяснено выше (§ 8). Введя найденные предѣлы въ написанныя выше обозначенія совокупностей, мы представимъ послѣдніе въ такомъ видѣ

Главныя совокупности:

I. $\overset{x' + y'/x'' + y''}{x'/x''}M_{y'/y''}$

II. $\overset{t'/t''}{x'/x''}M_{t' - x''/t'' - x'}$

III. $t' - y''/t'' - \overset{t'/t''}{y'}M_{y'/y''}$

Основныя совокупности:

I. $\overset{x' + y'/t''}{x'/t'' - y'}M_{y'/t'' - x'}$

II. $\overset{t'/x'' + y''}{t' - y''/x''}M_{t' - x''/y''}$

§ 15. Въ главныхъ совокупностяхъ промежутокъ между высшимъ и нисшимъ предѣломъ того признака, который не служитъ для опредѣленія группы, всегда равенъ суммѣ двухъ данныхъ промежутковъ.

Такъ, въ первой главной совокупности время, въ теченіи котораго произошли смертные случаи, равное $(x''+y'')-(x'+y')=(x''-x')+(y''-y')$, имѣетъ такую же продолжительность какъ сумма времени рожденія $(x''-x')$ и возраста $(y''-y')$. Затѣмъ для второй главной совокупности разность возрастовъ умершихъ $(t''-x')-(t'-x'')=(t''-t')+(x''-x')$ равна суммѣ промежутковъ времени рожденія $(x''-x')$ и времени смерти $(t''-t')$. Наконецъ для третьей главной совокупности время рожденія умершихъ $(t''-y')-(t''-y'')=(t''-t')+(y''-y')$ равно суммѣ промежутковъ времени смерти $(t''-t')$ и возраста $(y''-y')$.

Въ частномъ случаѣ, напримѣръ, время смерти лицъ, родившихся въ 1860—1865 годахъ и умершихъ въ возрастѣ отъ 5 до 20 лѣтъ, охватываетъ періодъ отъ 1865 до 1885 года, то есть 20 лѣтъ, что составляетъ сумму разностей времени рожденія (5 лѣтъ) и возраста (15 лѣтъ). Подобнымъ же образомъ крайніе предѣлы возраста для лицъ, родившихся въ теченіи 1870—1873 и умершихъ въ теченіи 1885—1889 годовъ, составляютъ 19 и12 лѣтъ, а разность ихъ 7 лѣтъ, и такую-же величину имѣетъ сумма разностей времени рожденія (3 года) и времени смерти (4 года). Наконецъ время рожденія лицъ, умершихъ отъ 1875 до 1880 года въ возрастѣ отъ 13 до 18 лѣтъ, падаетъ на 1857—1867 годы и охватываетъ промежутокъ въ 10 лѣтъ, и столько же лѣтъ охватываетъ сумма промежутковъ времени смерти (5 лѣтъ) и возраста (5 лѣтъ).

Что касается до основныхъ группъ, то въ этомъ отношеніи онѣ существенно различаются отъ главныхъ, и всѣ три промежутка, характеризующіе каждую основную совокупность, имѣютъ одинакую продолжительность, а именно $t''-x'-y'$, для первой и $x''+y''-t''$ для второй. Такъ, если возьмемъ первую совокупность, представляющую умершихъ въ возрастѣ *посл* 10 лѣтъ *до* наступленія 1886 года изъ родившихся *посл* наступленія 1865 года, то время рожденія этихъ умершихъ будетъ падать на 1865—1876 годы, время смерти на 1875—1886, а возрастъ равенъ 10—21 годамъ, и, какъ видимъ, каждый промежутокъ охватываетъ 11 лѣтъ. Для второй основной совокупности, представляющей, напримѣръ, умершихъ въ возрастѣ *до* 15 лѣтъ *посл* поступленія 1875 изъ родившихся *до* наступленія 1865 года, найдемъ, что время рожденія этихъ умершихъ приходится на 1860—1865 годы, время смерти на 1875—1880 годы, а возрастъ равенъ 10—15 годамъ, и каждый промежутокъ составляетъ 5 лѣтъ.

§ 16. Разсмотримъ теперь взаимныя соотношенія главныхъ и основныхъ совокупностей.

Пусть намъ дана первая главная совокупность $\overset{x'+y'|x''+y''}{x'|x''}M_{y'|y''}$.

Подраздѣлимъ ее прямыми линіями, параллельными линіямъ времени t, на рядъ другихъ совокупностей и притомъ такъ, чтобы каждая изъ послѣднихъ имѣла съ главною одно и тоже время рожденія. Положимъ, что мы провели линіи, соотвѣтствующія моментамъ времени t_1 и t_2. Тогда умершіе главной совокупности раздѣлятся на три части: 1) на умершихъ до наступленія момента t_1, 2) на умершихъ между моментами t_1 и t_2 и 3) на умершихъ послѣ момента t_2, и можно написать:

$$\overset{x'+y'.x''+y''}{x'\ x''} M_{y'|y''} - \overset{x'+y'|t_1}{x'|x''} M_{y'|} + \overset{t_1|t_2}{x''|x''} M + \overset{t_2|x''+y''}{x'|x''} M_{|y''}$$

Опредѣлимъ времена t_1 и t_2 такимъ образомъ, чтобы промежутокъ времени смерти для крайнихъ группъ равнялся промежутку времени рожденія для всей совокупности то есть:

$$t_1-(x'+y')=x''-x'$$
$$x''+y''-t_2=x''-x',$$

откуда

$$t_1=x''+y'$$
$$t_2=x'+y''.$$

Зная t_1 и t_2, мы можемъ найти неизвѣстные предѣлы возраста для первой и послѣдней группы, которые будутъ (§ 14): $y'+(x''-x')$ и $y''-(x''-x')$.

Вставивъ найденныя значенія въ выраженіе для $\overset{x'+y'.x''+y''}{x'|x''} M_{y'|y''}$, получимъ:

$$\overset{x'+y'\ x''+y''}{x'|x''} M_{y'\ y''} - \overset{x'+y'\ x''+y'}{x'\ x''} M_{y'\ y'+(x''-x')} + \overset{x''+y'|x'+y''}{x'|x''} M +$$
$$+ \overset{x'+y''|x''+y''}{x'|x''} M_{y''-(x''-x')y''} \qquad (1)$$

Не трудно видѣть, что крайнія группы, имѣющія всѣ три промежутка равные $x''-x'$, суть основныя совокупности, а средняя группа есть главная совокупность втораго рода. Такимъ образомъ данная совокупность разложилась на двѣ основныя совокупности и одну главную другаго вида сравнительно съ первоначальною.

Въ полученной главной совокупности, смотря по величинамъ x', x'', y', y'', можетъ быть:

$$x''+y'<x'+y'' \text{ или } x''-x'<y''-y'$$
$$x''+y'>x'+y'' \text{ или } x'-x'>y''-y'$$

Въ первомъ случаѣ, когда время рожденія меньше чѣмъ разность возрастовъ, промежутокъ между временами смерти имѣетъ положительное значеніе, а во второмъ случаѣ, когда время рожденія превышаетъ разность возрастовъ, этотъ промежутокъ имѣетъ отрицательное значеніе. Но легко убѣдиться, что всякая совокупность, характеризуемая какимъ-либо отрицательнымъ промежуткомъ, равна отрицательной величинѣ той же совокупности съ положительнымъ промежуткомъ *). Поэтому, при отрицательномъ промежуткѣ времени смерти, выраженіе (1) превратится въ слѣдующее:

$$ {}^{x'+y'|x''+y''}_{x'|x''} M_{y'|y''} = {}^{x'+y'|x''+y'}_{x'|x''} M_{y'|y'+(x''-x')} - {}^{x'+y''|x''+y'}_{x'|x''} M + $$
$$ + {}^{x'+y''|x''+y''}_{x'|x''} M_{y''-(x''-x')y''} \qquad (2) $$

§ 17. Вмѣсто раздѣленія данной совокупности линіями t_1 и t_2 такимъ образомъ, чтобы каждая часть содержала смертныя случаи изъ родившихся въ промежутокъ $x'-x'$, мы можемъ поставить условіемъ, чтобы во всѣхъ подраздѣленіяхъ умершіе имѣли возрастъ отъ y' до y'', то есть чтобы

$$ {}^{x'+y'\ x''+y''}_{x'|x''} M_{y'|y''} = {}^{x'+y't_1}_{x'|} M_{y'|y''} + {}^{t_1\ t_2} M_{y'\ y''} + {}^{t_2|x''+y''}_{x''} M_{y'|y''} $$

Дѣлая въ крайнихъ группахъ промежутокъ времени смерти равнымъ разности возрастовъ и опредѣляя на этомъ основаніи величины t_1 и t_2, найдемъ:

$$ t_1 - {}_1(x'+y') - y'' - y' $$
$$ x''+y''-t_2 = y''-y' $$
$$ t_1 = y''+x' $$
$$ t_2 = y'+x'' $$

---

*) Каждый промежутокъ, которымъ характеризуется какая-либо совокупность умершихъ, можно разсматривать какъ сумму или разность нѣкоторыхъ другихъ промежутковъ, а слѣдовательно и саму совокупность—какъ сумму или разность нѣкоторыхъ другихъ совокупностей того-же рода. Поэтому, изображая, напримѣръ, время рожденія умершихъ въ видѣ разности $h-k$, гдѣ h и k суть нѣкоторые промежутки времени и оставляя безъ перемѣны прочіе признаки совокупности, найдемъ.

$$ {}_{h-k}M = {}_h M\ \bar{}\ {}_k M $$

Если положимъ $h=0$, и примемъ во вниманіе, что ${}_0M=0$, то получимъ

$$ {}_{-k}M = \bar{}\ {}_k M, $$

что и требовалось доказать.

Замѣняя t_1 и t_2 ихъ значеніями и вставляя отсутствующіе предѣлы времени рожденія, получимъ для случаяя $x''+y'>x'+y''$ или $x''-x'>y''-y'$:

$$x'\,x''\,M_{y'|y''} = {}^{x'+y'|x'+y''}_{x'\,x'+(y''-y')}M_{y',y''} + {}^{x'+y''|x''+y'}_{\quad}M_{y'\,y''} + {}^{x''+y'|x''+y''}_{x''-(y''-y'),x''}M_{y'|y''} \quad . \quad (3)$$

а для случая $x''+y' < x'+y''$ или $x'' - x' < y''-y'$

$$x',x''\,M_{y'|y''} = {}^{x'+y'\,x'+y''}_{x',x'+(y''-y')}M_{y'|y''} - {}^{x''+y',x'+y''}_{\quad}M_{y'|y''} + {}^{x''+y'|x''+y''}_{x''-(y''-y')x''}M_{y'|y''} \quad . \quad (4)$$

Употребляя подобный пріемъ для второй и третьей главной совокупности, найдемъ:

$${}^{t'|t''}_{x'|x''}M = {}^{t'|t'+(x''-x')}_{x'\,x''}M_{t'-x''\,t'-x'} + {}^{x',x''}_{\quad}M_{t'-x'|t''-x''} + {}^{t''-(x''-x')|t''}_{x'|x''}M_{t''-x'',t''-x'} \quad (5)$$

$${}^{t'|t''}_{x'|x''}M = {}^{t'|t''}_{x'\,x'+(t''-t')}M_{t'-x'\,t''-x'} + {}^{t'|t''}_{\quad}M_{t''-x''|t'-x'} + {}^{t'\,t''}_{x''-(t''-t'),x''}M_{t'\quad x''|t''-x''} \quad (6)$$

$${}^{t',t''}M_{y'|y''} = {}^{t'\,t''}_{t'-y''\,t''-y''}M_{y''\quad(t''-t')|y''} + {}^{t'\,t''}_{t''-y''|t'-y'}M + {}^{t'|t''}_{t'-y'|t''-y'}M_{y'|y'+(t''-t')} \quad . \quad (7)$$

$${}^{t'|t''}M_{y'|y''} = {}^{t'|t'+(y''-y')}_{t'-y''|t'-y'}M_{y'|y''} + {}^{t'-y',t''-y''}_{\quad}M_{y'|y''} + {}^{t''-(y''-y')t''}_{t''-y''|t''-y'}M_{y'|y''} \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

и проч.

§ 18. Изъ выше приведенныхъ выраженій мы можемъ получить другія аналогичныя соотношенія, если, принимая каждую вновь найденную главную совокушность за неизвѣстную, мы опредѣлимъ ее въ зависимости отъ другихъ совокушностей, входящихъ въ разсматриваемое уравненіе. Такъ, напримѣръ, изъ уравненія (1) найдемъ,

$${}^{x''+y',x'+y''}_{x'\,x''}M = {}_{x'|x''}M_{y',y''} - {}^{x'+y'|x''+y'}_{x'\,x''}M_{y'|y'+(x''-x')} - {}^{x'+y''|x''+y''}_{x',x''}M_{y''-(x''-x'),y''}$$

Полагая $x'' + y' = t'$, $x' + y'' = t''$, получимъ

$${}^{t',t''}_{x'|x''}M = {}_{x'\,x''}M_{t'-x''|t''-x'} - {}^{t'-(x''}_{x'|x''}M_{t'\quad x''|t'-x'} - {}^{t'',t''+(x''-x')}_{x'|x''}M_{t''-x''\,t''\quad x'} \quad (9)$$

и т. д.

Такимъ образомъ мы всегда можемъ каждую главную совокушность выразить посредствомъ двухъ основныхъ совокушностей и одной главной другого вида, которая имѣетъ съ первою два изъ опредѣляющихъ промежутковъ одинаковые, а третій—различный.

Напримѣръ, въ уравненіи (1) совокупности $^{x'+y'\,x''+y''}_{x'|x''}M_{y'|y}$ и $^{x''+y''\,x'+y''}_{x'|x''}M =$ $= {}^{x''+y'|y''+x'}_{x'|x''}M_{y'|y''}$ имѣютъ время рожденія и возрастъ одни и тѣ же, а время смерти различное; затѣмъ въ уравненіи (5) совокупность $^{t'|t''}_{x'\,x''}M = {}^{t'|t''}_{x'|x''}M_{t'-x''|t''-x'}$ и $_{x'\,x''}M_{t'-x'|t''-x''-}{}^{t'|t''}_{x'\,x''}M_{t'-x'|t''-x''}$ имѣютъ одинаковыя время рожденія и время смерти и различный возрастъ и т. д.

§ 19. Всѣ разсмотрѣнныя отношенія между разнаго рода совокупностями можно легко прослѣдить на чертежѣ. Если, напримѣръ, четыреугольникъ *abcd* (черт. III), представляющій первую главную совокупность, раздѣлимъ линіями *ce* и *fb*, то увидимъ, что онъ распадется на параллелограммъ *fbec* и на два треугольника *afb* и *cde*, а слѣдовательно:

$$abcd = afb + fbec + cde,$$

что равнозначно съ выраженіемъ (1), ибо параллелограммъ изображаетъ первую главную совокупность, треугольникъ *afb* первую основную совокупность а треугольникъ *cde* вторую основную совокупность.

Если вмѣсто четыреугольника *abcd*, изображающаго совокупность, въ которой разность возрастовъ больше чѣмъ промежутокъ времени рожденія, намъ данъ четыреугольникъ *ghkl* (черт. III), для котораго, наоборотъ, промежутокъ времени рожденія больше разности возрастовъ, то, проведя линіи *mh* и *kn*, не трудно убѣдиться, что

$$ghkl = ghm - kmhn + kln,$$

а это соотношеніе выражаетъ ту же самую зависимость, какъ и уравненіе (2).

Изъ чертежа видно, что данный четвероугольникъ *ghkl* можетъ быть представленъ еще такъ:

$$ghkl = gok + okph + phl,$$

а это равнозначно съ выраженіемъ (3).

Подобнымъ образомъ можно опредѣлить посредствомъ геометрическихъ построеній и всякія другія соотношенія между главными и основными совокупностями.

§ 20. Если въ каждой разлагаемой главной совокупности промежутки, которыми она опредѣляется, равны другъ другу, то связь между главными и основными совокупностями можетъ быть выражена проще.

Положимъ, что въ первой главной совокупности $_{x',x''}M_{y'/y''}$ разность времени рожденія равна разности возрастовъ, то есть:

$$x'' - x' = y'' - y'$$

или

$$x'' + y' = y'' + x'$$

Тогда въ совокупности $^{x''+y'/x'+y''}_{x'/x''}M_{y'/y''}$, входящей въ соотношеніе (1), промежутокъ между временами смерти будетъ равенъ нулю, а слѣдовательно и сама совокупность приведется къ нулю. Поэтому соотношеніе (1) превратится въ слѣдующее:

$$_{x'/x''}M_{y'/y''} = {}^{x'+\,y'/x''+y'}_{x'/x''}M_{y'/y''} + {}^{x'+y''\;x''+y''}_{x'/x''}M_{y'/y''} \quad . \quad . \quad . \quad (10) \quad .$$

то есть, въ этомъ случаѣ первая главная совокупность распадается на двѣ основныя совокупности.

Подобныя разложенія получатся и для другихъ главныхъ совокупностей, и полагая въ уравненіяхъ для второй главной совокупности $x'' - x' = t'' - t'$, а въ уравненіяхъ для третьей $y'' - y' = t'' - t$, мы будемъ имѣть *):

$$^{t'/t''}_{x'x''}M = {}^{t'/t''}_{x'/x''}M_{t'-x''\;t-x'} + {}^{t'/t''}_{x'x''}M_{t''-x''/t''-x'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

$$^{t'/t''}M_{y'/y''} = {}_{t'-y''/t''-y'}{}^{t'/t''}M_{y'/y''} + {}_{t''-y''\;t''-y'}{}^{t'/t''}M_{y'/y''} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

§ 21. Изъ этихъ соотношеній видно, что обѣ основныя совокупности, составляющія каждую главную совокупность, имѣютъ съ послѣднею общими два изъ опредѣляющихъ промежутка, именно тѣ, которыми характеризуется данная главная совокупность; по отношенію-же къ третьему промежутку, не служащему для опредѣленія главной совокупности, всѣ онѣ между собою различаются.

---

*) Всѣ указанныя въ текстѣ соотношенія могутъ быть выведены какъ изъ разложеній, въ которыя обѣ основныя совокупности входятъ съ положительными знаками, такъ и изъ разложеній, гдѣ эти совокупности имѣютъ отрицательные знаки. Напримѣръ, выраженіе (9) приведется къ виду (10), если положить $^{t'/t''}_{x'/x''}M = 0$, а затѣмъ, принимая $t'=t''$, $t'-x''=-y'$, $t''-x'=-y''$, замѣнять въ индексахъ уравненія (9) одни величины другими.

Если мы примемъ во вниманіе, что, вслѣдствіе равенства промежутковъ въ главныхъ совокупностяхъ,

$$x'' + y' = y'' + x' = \frac{(x'+y')+(x''+y'')}{2}$$

$$t' - x' - t'' - x'' = \frac{(t'-x'')+(t''-x')}{2}$$

$$t' - y' - t'' - y'' = \frac{(t'-y'')+(t''-y')}{2}$$

то убѣдимся, что высшій предѣлъ въ первой основной совокупности того признака, который не данъ непосредственно, равенъ низшему предѣлу того же признака въ второй основной совокупности, и оба эти предѣла въ свою очередь составляютъ половину соотвѣтствующаго промежутка въ главной совокупности. Другими словами, для нахожденія третьяго промежутка въ основныхъ совокупностяхъ, должно раздѣлить соотвѣтствующій промежутокъ въ главной совокупности пополамъ, и одну половину взять какъ опредѣляющій промежутокъ для первой основной совокупности, а другую—для второй.

Такъ, напримѣръ, если намъ дана группа умершихъ въ возрастѣ отъ 10 до 20 лѣтъ изъ родившихся въ теченіи времени отъ 1850 по 1860 годъ, то изъ основныхъ совокупностей, на которыя она распадается, одна содержитъ смертные случаи, происшедшіе въ томъ же возрастѣ и изъ тѣхъ-же родившихся въ теченіе времени съ 1860 по 1870 годъ, а другая—подобные случаи, происшедшіе въ теченіе времени съ 1870 по 1880 года. Затѣмъ, имѣя группу умершихъ въ теченіе времени съ 1865 по 1870 годъ изъ родившихся въ промежуткѣ между 1845 и 1850 годами, мы найдемъ, что возрастъ умершихъ, входящихъ въ первую основную совокупность, будетъ колебаться въ предѣлахъ отъ 15 до 20 лѣтъ, а возрастъ умершихъ во второй основной совокупности—въ предѣлахъ отъ 20 до 25 лѣтъ. Наконецъ, въ частномъ случаѣ третьей главной совокупности, представляющей умершихъ въ возрастѣ отъ 7 до 12 лѣтъ въ періодъ съ 1875 по 1880 годъ, первая основная совокупность будетъ содержать умершихъ того-же возраста и времени, которые родились въ періодъ отъ 1863 по 1868 годъ, а вторая основная совокупность—аналогичныхъ умершихъ, родившихся въ періодъ времени съ 1868 по 1873 годъ.

§ 22. Обращаясь къ чертежу (черт. III), мы видимъ, что четыреугольники $a'b'c'd'$, $c'e'f'g'$, $h'c'k'l'$, изображающія первую, вторую и третью главную совокупность съ равными опредѣляющими промежутками, раздѣляются, линіями $d'b'$, $g'c'$, $h'l'$ на основныя совокупности $a'b'd'$, $d'b'c'$, $g'c'e'$. $g'e'f'$, $c'h'l'$, $h'l'k'$, причемъ линіи раздѣла $d'r'$, $g'e'$,

l'q', проходятъ чрезъ средины промежутковъ *m'n'*, *f'd'*, *o'p'*, которыя не служатъ для опредѣленія соотвѣтствующихъ главныхъ совокупностей.

§ 23. При обработкѣ статистическихъ показаній объ умершихъ какъ время рожденія и смерти, такъ и возрастъ ихъ выражаются или въ однѣхъ и тѣхъ же единицахъ (напримѣръ въ годахъ), охватывая притомъ всегда цѣлое число единицъ, или же, въ случаѣ неодинаковости употребленныхъ единицъ для разныхъ признаковъ (напримѣръ года для однихъ, мѣсяца, недѣли и пр. для другихъ), могутъ быть приведены къ однѣмъ и тѣмъ же единицамъ низшаго порядка и выражены цѣлымъ числомъ послѣднихъ.

Изобразивъ графически какія угодно совокупности умершихъ съ промежутками, выражаемыми цѣлыми числами однѣхъ и тѣхъ же единицъ, мы увидимъ, что онѣ всегда могутъ быть разложены на цѣлое число основныхъ совокупностей того и другого рода, какъ это показываютъ фигуры *abcdef*, *ghklm*, *nopq* и проч. (черт. IV).

Такимъ образомъ полная картина совмѣстнаго распредѣленія умершихъ по времени рожденія, по времени смерти и по возрасту можетъ быть дана въ видѣ сѣти треугольниковъ, а отсюда слѣдуетъ, что и табличная группировка умершихъ въ матеріалахъ по движенію населенія, чтобы быть вполнѣ пригодною для разныхъ цѣлей, должна соотвѣтствовать чертежу и вестись по основнымъ совокупностямъ. Это можетъ быть достигнуто, если въ каждомъ отчетномъ году умершіе каждой возрастной группы будутъ разбиты на подгруппы по временамъ ихъ рожденія, какъ показываетъ нижеслѣдующая схема:

Отчетный годъ.	1880													
Возрастъ.	0—1 г.		1—2 г.		2—3 г.		3—4 г.		4—5 л.		5—6 л.		5—7 л.	
Время рожденія.	1880	1879	1879	1878	1878	1877	1877	1876	1876	1875	1875	1874	1874	1873

§ 24. Намъ остается выяснить взаимныя отношенія между разными группами живыхъ и умершихъ.

Если мы, выбравъ группу живыхъ людей, родившихся въ теченіе извѣстнаго времени, станемъ слѣдить за постепеннымъ ея вымираніемъ между какими-либо предѣлами возраста или времени наблюденія, то очевидно, что разность между численностью группы у нижняго предѣла и численностью ея у верхняго предѣла дастъ намъ число смертныхъ случаевъ, происшедшихъ въ составѣ группы въ разсматриваемый промежутокъ *). Основываясь на этомъ соображеніи, мы всегда можемъ выразить какъ разность двухъ извѣстныхъ совокупностей живыхъ всякую совокупность умершихъ, представляющую число смертныхъ случаевъ, которые наблюдались между данными предѣлами въ какомъ либо *поколѣніи*. Такимъ образомъ мы прямо находимъ, что первая основная совокупность умершихъ

$$\overset{t''}{x'|}M_{y'|} = {}_{x'|t''} - \overset{t''}{{}_{y'}} M_{y'|} = {}_{x'|t''} - {}_{y} V_{y'} - {}_{x'|t''} - \overset{t''}{{}_{y'}} V \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

Точно также вторая основная совокупность

$$\overset{t'}{x''}M_{|y''} = {}_{t'} - {}_{y''} \overset{t'}{{}_{x''}} M_{y''} = {}_{t'} \quad {}_{y''|x''} \overset{t'}{} V - {}_{t'} - {}_{y''} x'' V_{y''} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Затѣмъ двѣ главныя совокупности перваго и второго рода непосредственно даютъ:

$$x'\,x''M_{y'\,y''} = x'\,x'\,V_{y'} - x'\,x''\,V_{y''} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

$$\overset{t'|t''}{x'\,x'}M = \overset{t'}{{}_{x'|x''}} V - \overset{t''}{{}_{x'|x''}} V \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Что касается до третьей главной совокупности $\overset{t'|t''}{}M_{y'\,y''}$, то связь ея съ тѣми живыми, изъ которыхъ она происходитъ, не представляется столь ясною какъ въ предыдущихъ случаяхъ. Во первыхъ, намъ не дано явно время рожденія членовъ группы, а во-вторыхъ, такъ какъ линіи жизни могутъ пересѣкаться и съ линіями возраста и съ линіями времени, то для этой группы мы имѣемъ два нижнихъ (y' и t') и два верхнихъ предѣла (y'' и t'').

Чтобы рѣшить задачу въ данномъ случаѣ, мы обратимся къ формуламъ, выражающимъ третью главную совокупность черезъ другія совокупности, связь которыхъ съ живыми мы уже нашли. Взявъ, напримѣръ, соотношеніе (7) (§ 17).

---

*) Понятно, что это будетъ справедливо лишь въ томъ случаѣ, если единственною причиною убыли членовъ группы является ихъ смерть, и составъ ея не измѣняется путемъ переселеній—условіе, которое мы всегда предполагаемъ при нашихъ выводахъ.

$$^{t',t''}M_{y'\,y''} = {}_{t-y'',t'-y''}{}^{t',t''}M_{y''-(t''-t'),y''} + {}_{t'-y'',t-y'}{}^{t'\,t''}M + {}_{t'\;\;y',t''-y'}{}^{t',t''}M_{y'\,y'+(t''-t')}$$

мы видимъ, что оно состоитъ изъ основной совокупности второго рода ${}_{t-y'',t'-y''}{}^{t',t''}M_{y''-(t''-t'),y''}$, которая по уравненію (14) равна:

$$_{t-y''\,t'-y''}{}^{t'\,t''}M_{y''-(t''-t'),y'} - {}_{t-y''\,t''-y'}{}^{t'}V - {}_{t'\;\;y''\,t'-y''}V_{y''} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a).$$

Затѣмъ средній членъ ${}_{t''-y'',t'-y'}{}^{t',t''}M$, представляющій вторую главную совокупность, на основаніи выраженія (16) равенъ:

$$_{t''-y'',t'-y'}{}^{t'\,t''}M = {}_{t''\;\;y'',t'-y'}{}^{t'}V - {}_{t''-y'',t-y'}{}^{t''}V \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b).$$

Наконецъ третій ${}_{t'-y',t''-y'}{}^{t'\,t''}M_{y',y'+(t''-t')}$ членъ есть основная совокупность перваго рода и по выраженію (13) равенъ:

$$_{t'-y',t''-y'}{}^{t',t''}M_{y',y'+(t''-t')} = {}_{t-y',t''-y'}V_{y'} - {}_{t-y',t''-y'}{}^{t''}V \quad \ldots\ldots\ldots \quad (c).$$

Если сложимъ выраженія (a), (b) и (c) и примемъ во вниманіе, что

$$_{t-y'',t''-y''}{}^{t'}V + {}_{t''\;\;y'',t-y'}{}^{t'}V = {}_{t-y''\,t'\;\;y'}{}^{t'}V,$$

ибо времена рожденій этихъ двухъ группъ живыхъ слѣдуютъ непосредственно одно за другимъ, и что по той же причинѣ

$$-\left({}_{t''-y''\,t'\;\;y'}{}^{t''}V + {}_{t'\;\;y',t''-y'}{}^{t''}V\right) = -{}_{t''-y'',t''-y'}{}^{t''}V$$

то получимъ:

$$^{t',t''}M_{y'\,y''} = {}_{t'\;\;y''\,t'\;\;y'}{}^{t'}V - {}_{t''-y''\,t'-y'}{}^{t''}V + {}_{t'\;\;y',t''-y'}V_{y'} - {}_{t'-y''\,t''\;\;y''}V_{y''}.$$

---

*) Основныя совокупности въ данныхъ выше разложеніяхъ относятся къ первому или второму роду смотря по тому, имѣется-ли въ числѣ ихъ указателей соотвѣтственно одна изъ величинъ: $x'+y'$, $t''-y'$, $t''-x'$ или $x''+y''$, $t'-y''$, $t'-x''$ (срав. § 14).

Принимая же во вниманіе, что (§ 8):

$$t'-y''|t'-{}^{t'}_{y'}V={}^{t'}V_{y'|y''},$$

$$t''-y''|t''-{}^{t''}_{y'}V={}^{t''}V_{y'|y''},$$

$$t'-y'|t''-y'V_{y'}={}^{t'|t''}V_{y'}$$

$$t'-y'|t''-y''V_{y''}={}^{t'|t''}V_{y''},$$

найдемъ окончательно

$$.\ {}^{t'|t''}M_{y'|y''}={}^{t'}V_{y'|y''}-{}^{t''}V_{y'|y''}+{}^{t'\,t''}V_{y'}-{}^{t'\,t''}V_{y''}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (17)$$

то есть, умершіе въ извѣстномъ возрастѣ въ теченіи извѣстнаго времени составляютъ разность между *современниками*, находящимися въ данныхъ возрастахъ у верхняго и у нижняго предѣла времени наблюденія съ прибавкою разности *сверстниковъ*, достигающихъ въ теченіе времени наблюденія низшаго и высшаго предѣла возраста.

§ 25. Чтобы легче прослѣдить выведенныя соотношенія на чертежѣ, мы вмѣсто указаннаго выше употребимъ другое графическое изображеніе живыхъ.

Если провести линію возраста ωZ (черт. III), соотвѣтствующую крайнему предѣлу, до котораго можетъ доживать человѣкъ, то ясно, что все число линій жизни въ какомъ либо четыреугольникѣ $o'q'v'u'$, ограниченномъ линіями OX и ωZ, представитъ полный итогъ поколѣнія, родившагося въ теченіе времени $o'q'$ и вымершаго въ естественныхъ предѣлахъ человѣческой жизни.

Проведя въ данномъ четыреугольникѣ какую нибудь линію $h'g'$, мы по предыдущему найдемъ, что число линій жизни, *оканчивающихся* въ четыреугольникѣ $o'q'c'h$ дастъ извѣстный итогъ умершихъ, а число линій жизни, *пересѣкаемыхъ* линіею $h'g'$ дастъ извѣстный итогъ живыхъ. Но очевидно, что всѣ эти линіи живыхъ оканчиваются въ четвероугольникѣ $h'c'u'v'$. Такимъ образомъ, подобно умершимъ, мы и живыхъ можемъ изобразить въ видѣ площадей, которыя отличаются отъ площадей умершихъ наличностью въ качествѣ одного изъ опредѣляющихся признаковъ высшаго достижимаго человѣкомъ возраста.

На основаніи сказаннаго мы безъ всякаго затрудненія можемъ вывести изъ чертежа всѣ предшествующія соотношенія живыхъ и умершихъ въ видѣ слѣдующихъ равенствъ между разными площадями:

$$b'h'c'=b'h'u'v'-h'c'u'v'$$

$$c'h'l' = c'h'u'v' - c'l'u'v'$$

$$b'h'c'l' = b'h'u'v' - c'l'u'v'$$

$$c'h'l'e' = c'h'u'v' - l'e'u'v'$$

$$h'k'l'c' = h'k'v'w' - k'l'v'w' + h'c'u'v' - c'l'u'v'.$$

§ 26. Имѣя статистическія показанія о трехъ главныхъ совокупностяхъ, мы располагаемъ матеріаломъ, необходимымъ для изученія смертности въ разныхъ направленіяхъ. Между главными совокупностями особенно важное значеніе имѣетъ первая, такъ какъ она является основнымъ элементомъ для непосредственнаго вычисленія нормальной таблицы смертности, то есть таблицы, которая содержитъ числовыя данныя относительно постепеннаго вымиранія какого либо поколѣнія по мѣрѣ увеличенія его возраста. Двѣ прочія главныя совокупности могутъ давать въ этомъ отношеніи только приблизительныя величины. Но за то онѣ освѣщаютъ вопросъ съ другой стороны, показывая, сколько лицъ даннаго поколѣнія переживаютъ извѣстные предѣлы времени (вторая), или какъ измѣняется число умершихъ въ теченіе извѣстнаго времени по возрастамъ (третья). Мы не будемъ подробно разсматривать эти вопросы, которые выходятъ изъ предѣловъ нашей задачи, отсылая интересующихся къ указаннымъ выше трудамъ.

II.

§ 27. Изслѣдованіе свойствъ разныхъ совокупностей показало намъ, что любая изъ нихъ можетъ быть найдена какъ результатъ взаимнаго сочетанія двоякаго рода основныхъ совокупностей, являющихся такимъ образомъ первичными группами, на которыя распадается статистическій матеріалъ объ умершихъ. Поэтому опредѣленіе числе́ннаго состава основныхъ совокупностей для разныхъ возрастовъ и въ разное время есть главное требованіе, которому должна удовлетворять раціональная статистическая обработка показаній о смертныхъ случаяхъ, и если этотъ составъ не извѣстенъ изъ прямыхъ наблюденій, то для рѣшенія задачи остается прибѣгнуть къ помощи вычисленій, интерполируя основныя совокупности посредствомъ тѣхъ группъ, какія имѣются въ нашемъ распоряженіи.

Какъ мы уже имѣли случай упомянуть, большая часть статистическаго матеріала объ умершихъ дается въ видѣ главныхъ совокупностей третьяго рода, причемъ умершіе каждаго календарнаго года распредѣляются на группы, характеризуемыя годовыми возрастными промежутками, за исключеніемъ лишь смертныхъ случаевъ въ возрастѣ до трехъ лѣтъ. Относительно этихъ смертныхъ случаевъ приняты болѣе мелкія возрастныя подраздѣленія, и въ большинствѣ западно-европейскихъ странъ умершіе по первому году распредѣляются по мѣсяцамъ жизни, съ указаніемъ нерѣдко для умершихъ на первомъ мѣсяцѣ недѣль и иногда дней жизни, а умершіе по второму году группируются въ итоги по четвертямъ года. У насъ въ Россіи такой дробной группировки не имѣется, и умершіе на первому году распредѣляются лишь по слѣдующимъ возрастнымъ промежуткамъ: отъ рожденія до 1 мѣсяца, отъ 1 до 3 мѣсяцевъ, отъ 3 до 6 мѣсяцевъ и отъ 6 мѣсяцевъ до 1 года; затѣмъ остальные умершіе до 80 лѣтъ даются по годовымъ возрастнымъ промежуткамъ, а умершіе свыше 80 лѣтъ—по пятилѣтнимъ.

§ 28. Представимъ себѣ главную совокупность третьяго рода $OTPQ$ (Черт. V), изображающую число умершихъ въ теченіе промежутка времени OT, равнаго единицѣ, въ возрастѣ отъ нуля до единицы. Допустимъ, что, кромѣ численности всей этой группы, извѣстны также частные итоги смертныхъ случаевъ a,b,c,d... происшедшіе въ то же время OT въ возрастахъ отъ нуля до y_1, отъ y_1 до y_2, отъ y_2 до y_3 и т. д., при-

четъ $y_1, y_2, y_3 \ldots$ величины меньшія единицы. На чертежѣ этимъ частнымъ группамъ, положимъ, соотвѣтствуютъ четыреугольники $OTAB$, $ABCD$, $CDEF \ldots$

Смертные случаи распредѣляются по площади четыреугольника $OTPQ$ неравномѣрно, и если мы раздѣлимъ его линіями параллельными OT на равныя горизонтальныя полоски, то найдемъ, что итоги смертныхъ случаевъ въ отдѣльныхъ полоскахъ съ удаленіемъ послѣднихъ отъ линіи OT, постепенно уменьшаются. Другими словами, *густота* умершихъ, то есть число ихъ, падающее на единицу площади, съ увеличеніемъ возраста убываетъ. Кромѣ того, и въ различныхъ частяхъ одной и той-же полоски густота умершихъ имѣетъ разныя величины, ибо, съ одной стороны, густота родившихся, изъ которыхъ происходятъ умершіе, не остается одинаковою въ теченіи всего времени OT, а съ другой стороны — постоянно мѣняется и дѣйствіе внѣшнихъ причинъ, вліяющихъ на смертность. Но мы не станемъ обращать вниманія на оба эти второстепенные фактора, и въ дальнѣйшемъ изслѣдованіи будемъ руководствоваться предположеніемъ, что густота смертныхъ случаевъ зависитъ отъ одного только возраста умершихъ.

§ 29. Зная итоги умершихъ, соотвѣтствующіе возрастамъ $y_1, y_2, y_3 \ldots$ можно допустить, какъ первое приближеніе къ истинѣ, что измѣненія густоты происходятъ какъ разъ на границахъ указанныхъ возрастовъ, въ промежуткахъ-же между ними густота остается постоянною. Въ этомъ предположеніи числа смертныхъ случаевъ въ предѣлахъ между двумя данными возрастами будутъ пропорціональны площадямъ, по которымъ они распредѣляются на нашемъ чертежѣ. Раздѣливъ четыреугольникъ $OTPQ$ на два треугольника OPQ и OTQ, то есть разбивъ главную совокупность на обѣ составныя совокупности, мы, на основаніи сказаннаго, найдемъ, что изъ общаго числа смертныхъ случаевъ a, имѣвшихъ мѣсто въ возрастѣ отъ нуля до y_1 и распредѣленныхъ на площади $OTAB$, часть приходящаяся на треугольникъ OPQ, пропорціональна площади AOY_1, а часть приходящаяся на треугольникъ OTQ, пропорціональна площади $OTBY_1$; затѣмъ изъ общаго числа смертныхъ случаевъ b, происшедшихъ въ возрастѣ отъ y_1 до y_2 и заключающихся въ площади $ABCD$, часть, падающая на треугольникъ OPQ, пропорціональна площади AY_1Y_2C, а часть, падающая на треугольникъ OTQ, пропорціональна площади Y_1BDY_2 и т. д. Такимъ образомъ, означая черезъ $m_1, m'_1, m''_1 \ldots$ число умершихъ въ площадяхъ AOY, $AY_1Y_2C \ldots$, а черезъ m_2, m'_2, m''_2, въ площадяхъ $OTBY_1$, $Y_1BDY_2 \ldots$ получимъ:

$$m_1' = \frac{\frac{y^2}{2}}{y_1} a = \frac{y_1}{2} a \qquad m_2' = \frac{y_1 - \frac{y_1^2}{2}}{y_1} a = \frac{2 - y_1}{2} a$$

$$m_1'' = \frac{\frac{y^2_2 - y_1^2}{2}}{y^2 - y_1} b = \frac{y_2 + y_1}{2} b \qquad m_2'' = \frac{y_2 - y_1 - \frac{y^2_2 - y_1^2}{2}}{y_2 - y_1} b = \frac{2 - (y_2 + y_1)}{2} b.$$

$$m_1''' = \frac{\frac{y_3^2 - y_2^2}{2}}{y_3 - y_2} c = \frac{y_3 + y_2}{2} c \qquad m'''_2 = \frac{y_3 - y_1 - \frac{y_3^2 - y_2^2}{2}}{y_3 - y_2} c = \frac{2 - (y_3 + y_3)}{2} c.$$

. . . . . .

. . . . . .

$$m_1^{(n)} = \frac{\frac{y^{2n} - y^2_{n-1}}{2}}{y_n - y_{n-1}} l = \frac{y + y_{n-1}}{2} l \qquad m_2^{(n)} = \frac{y^n - y_{n-1} - \frac{y^{2n} - y^2_{n-1}}{2}}{y^n \quad y_{n-1}} l = \frac{2 - y_{n-1}}{2} l$$

Найдя суммы $m_1 + m_1' + m_2'' + \ldots$ и $m_3 + m'_2 + m_2'' + \ldots$ и означивъ первую изъ нихъ черезъ M_1', а вторую черезъ M''_1, получимъ для искомыхъ основныхъ совокупностей OPQ и OTQ въ предположеніи $y_n = 1$ слѣдующія выраженія:

$$M_1' = \frac{y_1 a + (y_2 + y_1) b + (y_3 + y_2) c + \ldots + (1 + y_{n-1}) l}{2} \qquad (1)$$

$$M_1'' = a + b + c + \ldots + l - \frac{y_1 a + (y_2 + y_1) b + (y_3 + y_2) c + \ldots + (1 + y_{n-1}) l}{2} \qquad (2)$$

Понятно, что величины M_1' и M_1'' будутъ, тѣмъ ближе къ истинѣ, чѣмъ меньшіе промежутки между данными возрастами $O, y_1, y_2, y_3 \ldots$

§ 30. Принявъ эти промежутки безконечно малыми, нужно допустить, какъ измѣненія числа смертныхъ случаевъ, такъ и измѣненія ихъ густоты отъ промежутка къ промежутку, тоже безконечно-малыми, то есть разсматривать объ указанныя величины, какъ непрерывныя функціи возраста. Мы и сдѣлаемъ такое допущеніе, хотя и противорѣчащее дѣйствительности, но вполнѣ позволительное для нахожденія не безусловно точныхъ, а лишь приблизительныхъ величинъ.

Пусть

$$z = f(y) \qquad (3)$$

представляетъ число умершихъ въ теченіи единицы времени въ возрастѣ отъ 0 до y. Истинное соотношеніе между z и y намъ неизвѣстно, и выборъ $f(y)$ какъ функціи только интерполляціонной лежитъ въ нашей волѣ. Остановившись на функціи какого-либо вида, мы должны опредѣлить ее сообразно даннымъ условіямъ задачи, которыя въ нашемъ случаѣ сводятся къ требованію, чтобы для возрастовъ $y_1, y_2, y_3, y_4 \ldots$ функція давала значенія $a, a+b, a+b+c, a+b+c+d \ldots$

Изъ системы уравненій:

$$f(y_1) = a$$

$$f(y_2) = b + c$$

$$f(y_3)=a+b+c$$
$$f(y_4)=a+b+c+d$$
. . . . . .

при надлежащемъ выборѣ $f(y)$ мы и найдемъ значенія постоянныхъ, и, слѣдовательно, получимъ вполнѣ опредѣленное выраженіе для интерполяціонной функціи.

§ 31. Найдя эмпирическій законъ измѣненія числа смертныхъ случаевъ въ зависимости отъ возраста, мы имѣемъ всѣ данныя для интерполированія основныхъ совокупностей.

Положимъ, что четыреугольникъ $OTPQ$ (черт. V) раздѣленъ на безконечное множество безконечно узкихъ параллелограммовъ прямыми параллельными OT. Если возьмемъ одинъ изъ такихъ параллелограммовъ $RSVU$, лежащій между возрастами $OY=y$ и $OY'=y+dy$, то число смертныхъ случаевъ въ немъ dM очевидно равняется $(y+dy)-f(y)$. Означая производную отъ $f(y)$ черезъ $F(y)$, получимъ,

$$dM=F(y)dy$$

Замѣтимъ, что площадь параллелограмма $RSVU$, имѣющаго основаніемъ единицу, а высотою dy, выражается чрезъ dy, а потому

$$F(y)=\frac{dM}{dy}$$

есть число смертныхъ случаевъ, падающее на единицу площади при смертности, соотвѣтствующей возрасту y, или густота умершихъ въ этомъ возрастѣ.

Каждая изъ безконечно малыхъ полосокъ $RSVU$ (черт. V) раздѣляется линіей OQ на двѣ трапеціи, изъ которыхъ одна лежитъ въ треугольникѣ OPQ, а другая—въ треугольникѣ OTQ. Пренебрегая безконечно малыми высшихъ порядковъ, можно принять обѣ трапеціи за параллелограммы и считать ихъ площади равными произведеніямъ изъ основаній на общую высоту dy. Что касается до основаній, то они могутъ быть опредѣлены изъ подобія соотвѣтствующихъ треугольниковъ, или же слѣдующимъ образомъ.

Отнесемъ линіи OP и TQ къ прямоугольнымъ осямъ координатъ OT и OQ. Тогда уравненіе линіи OP, проходящей черезъ начало координатъ и раздѣляющей пополамъ уголъ между осями положительныхъ ординатъ и отрицательныхъ абсциссъ, будетъ

$$y=-x,$$

а уравненіе линіи OT, отсѣкающей на осяхъ отрѣзки, равные единицѣ—

$$x+y=1.$$

Какъ видно изъ чертежа, основанія трапецій равны абсциссамъ точекъ R и S, то есть

$$YR=-x=y$$

$$YS=x=1-y$$

Слѣдовательно, площади трапецій будутъ:

$$R'YY'U=ydy$$

$$YSVY'=(1-y)dy.$$

Помноживъ площади на $F(y)$, найдемъ слѣдующія элементарныя величины числа смертныхъ въ треугольникѣ OPQ и OTQ.

$$dM'=yF(y)dy$$

$$dM''=(1-y)F(y)dy$$

Взявъ интегралы, получимъ

$$\int dM'=\int yF(y)dy=\varphi(y)+K$$

$$\int dM''=\int F(y)dy-\int yF(y)dy=\chi(y)+C-[\varphi(y)+K]$$

Чтобы удовлетворить условіямъ задачи, очевидно должно быть

$$\chi(y)+C=f(y),$$

и изъ этого уравненія найдется значеніе постояннаго C. Затѣмъ, такъ какъ треугольникъ OPQ при $y=0$ превращается въ точку и, слѣдовательно, не имѣетъ никакого протяженія, то число смертныхъ случаевъ въ этомъ треугольникѣ при $y=0$ должно быть равно нулю. Поэтому имѣетъ мѣсто уравненіе.

$$\varphi(0)+K=0,$$

отсюда

$$K=-\varphi(0).$$

Такимъ образомъ для числа умершихъ въ возрастѣ отъ рожденія до y, приходящихся на треугольники OPQ и OTQ, имѣемъ выраженія:

$$M'_y=\varphi(y)-\varphi(0). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$M''_y=f(y)-[\varphi(y)-\varphi(0)] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

а для числа же смертныхъ случаевъ въ возрастѣ отъ рожденія до единицы:

$$M_1' = \varphi(1) - \varphi(0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

$$M_1'' = f(1) - [\varphi(1) - \varphi(0)] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Такъ какъ сумма подлежащихъ опредѣленій основныхъ совокупностей $M'_{\overline{y}}$ и M''_y равна $f(y)$, то достаточно вычислить одну изъ нихъ — другая получится какъ разность между $f(y)$ и найденною совокупностью.

§ 32. Предыдущія выраженія выведены въ предположеніи, что промежутокъ времени, въ теченіе котораго имѣли мѣсто разсматриваемые смертные случаи, равенъ единицѣ, то есть линія

$$OT = 1.$$

Болѣе общія формулы мы получимъ, если примемъ линію OT равной не единицѣ, а какой-нибудь величинѣ n. Въ этомъ случаѣ уравненіе линіи OP остается безъ перемѣны

$$y = -x,$$

уравненіе-же линіи TQ, отсѣкающей на осяхъ отрѣзки равные n, будетъ

$$x + y = n.$$

Вслѣдствіе этого, при той же густотѣ $F(y)$, получимъ:

$$RYY'U_y = yF(y)dy$$

$$YSVY' = (n-y)F(y)dy$$

Переходя къ интеграламъ, найдемъ

$$M'_y = \varphi(y) - \varphi(0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

$$M''_y = nf(y) - [\varphi(y) - \varphi(0)] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (B)$$

§ 33. Нужно имѣть въ виду, что

$$\int_0^y F(y)dy = \varphi(y) - \varphi(0)$$

будетъ соотвѣтствовать условіямъ задачи въ томъ случаѣ, если функція $F(y)$ имѣетъ въ предѣлахъ отъ 0 до y такой-же ходъ измѣненій, какъ густота, то есть убываетъ съ сохраненіемъ одного и того же знака. Отсюда слѣдуетъ, что въ тѣхъ

же предѣлахъ функція $f(y)$ не должна переходить черезъ значенія maximum и minimum, а производная $F'(y)$ отъ $F(y)$— черезъ значеніе нуль.

Затѣмъ, такъ какъ цѣлое болѣе части, то для всякаго значенія y

$$f(y)>\varphi(y)-\varphi(0)$$

или

$$\chi(y)+C>\varphi(y)-\varphi(0)$$

Если $\chi(y)+C$ есть цѣлая алгебранческая функція, то, при $y=o$, первая часть предыдущаго неравенства обратится въ постоянный членъ C, вторая-же часть при указанной величинѣ y, согласно выводу, равна нулю, а потому должно быть

$$C>0$$

Такимъ образомъ, подыскивая для выраженія числа смертныхъ случаевъ въ зависимости отъ возраста цѣлую алгебранческую функцію, надо ставить условіемъ, чтобы постоянный членъ ея имѣлъ положительное значеніе.

§ 34. Выше уже было объяснено (§ 28), что густота смертныхъ случаевъ зависитъ не только отъ возраста умершихъ, но обусловливается также густотою родившихся и тѣми внѣшними вліяніями, которымъ подвергались разсматриваемыя лица въ теченіи времени наблюденія. Считая густоту въ возрастѣ y величиною постоянною въ продолженіи всего періода наблюденія, мы вводимъ въ окончательные результаты нашихъ вычисленій нѣкоторую ошибку. Эту ошибку можно уменьшить, если данную совокупность разложить на совокупности того-же вида съ различною густотою умершихъ, и затѣмъ на основаніи полученныхъ частныхъ группъ вычислить искомыя основныя совокупности, предполагая, какъ и прежде, что для каждой группы густота измѣняется только съ возрастомъ умершихъ. При такомъ способѣ не только принимается въ расчетъ неравномѣрность густоты во времени, но вмѣстѣ съ тѣмъ, при суммированіи отдѣльныхъ показаній, ошибки съ противоположными знаками отчасти взаимно покрываются.

§ 35. Для вывода соотвѣтствующихъ формулъ положимъ, что четыреугольникъ $OTPQ$ (чер. VI) изображаетъ число умершихъ въ теченіе времени $OT=n$ въ возрастѣ отъ нуля до $OQ=n$. Если въ выраженіе (B) § 32, вмѣсто $f(y)$, $\varphi(y)$ и y, вставимъ $f_n(y)$, $\varphi_n(y)$ и n, то число смертныхъ случаевъ въ треугольникѣ OTQ будетъ

$$n f_n(n) - [\varphi_n(n) - \varphi_n(0)] \quad \ldots \quad (a)$$

Для какой-либо другой величины времени наблюденія $OT'=m$, число смертныхъ случаевъ въ возрастѣ отъ нуля до $OQ'=m$ выразится при той-же густотѣ черезъ

$$m f_n(m) - [\varphi_n(m) - \varphi_n(0)] \quad \ldots \quad (b)$$

Если мы вычтемъ эти выраженія одно изъ другого, то получимъ число смертныхъ случаевъ въ трапеціи $TT'QQ'$ съ промежуткомъ времени наблюденія $m - n$. Это число будетъ равно

$$[\, nf_n(n) - mf_n(m)\,] - [\varphi_n(n) - \varphi_n(m)\,].$$

Полагая здѣсь n послѣдовательно равнымъ $1, 2, 3 \ldots n$, $m = 0, 1, 2, 3 \ldots n-1$, мы найдемъ слѣдующія выраженія для числа смертныхъ случаевъ въ треугольникѣ и въ трапеціяхъ OT_1Q_1, $T_1T_2Q_1Q_2$, $T_2T_3Q_2Q_3$. . имѣющихъ промежутки времени наблюденія равные единицѣ и разную густоту умершихъ:

$$\left.\begin{array}{r} f_1(1) - [\,\varphi_1(1) - \varphi_1(0)\,] \\ [\,2f_2(2) - f_2(1)\,] - [\,\varphi_2(2) - \varphi_2(1)\,] \\ [\,3f_3(3) - 2f_3(2)\,] - [\,\varphi_3(3) - \varphi_3(2)\,] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [\,nf_n(n) - (n-1)f_n(n-1)\,] - [\varphi_n(n) - \varphi_n(n-1)\,] \end{array}\right\} \ldots\ldots (9)$$

§ 36. Вычитая послѣдовательно выраженія (9) изъ $f_n(n)$ или изъ всего числа смертныхъ случаевъ въ любой полоскѣ $T_1T_2P_1P_2$ съ промежуткомъ T_1T_2 равнымъ единицѣ, мы найдемъ слѣдующіе итоги умершихъ въ полоскахъ QQ_1PP_1, $Q_1Q_2P_1P_2$, $Q_2Q_3P_2P_3$...

$$\left.\begin{array}{r} f_1(n) - f_1(1) + [\,\varphi_1(1) - \varphi_1(0)\,] \\ f_2(n) - [\,2f_2(2) - f_2(1)\,] + [\,\varphi_2(2) - \varphi_2(1)\,] \\ f_3(n) - [\,3f_3(3) - 2f_3(2)\,] + [\,\varphi_3(3) - \varphi_3(2)\,] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(n) - [\,nf_n(n) - (n-1)f(n-1)\,] + [\,\varphi(n) - \varphi_n\ n-1)\,] \end{array}\right\} \ldots (10)$$

Замѣтимъ, что давая n въ послѣднемъ членѣ значенія $1, 2, 3 \ldots n$, мы получимъ числа смертныхъ случаевъ въ треугольникахъ въ родѣ Q_1Q_2S примыкающихъ съ лѣвой стороны къ линіи OT:

$$\left.\begin{array}{r} \varphi_1(1) - \varphi_1(0) \\ [\,f_2(1) - f_2(2)\,] + [\,\varphi_2(2) - \varphi_2(1)\,] \\ 2\,[\,f_3(2) - f_3(3)\,] + [\,\varphi_3(3) - \varphi_3(2)\,] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (n\ \ 1)\,[f_n(n-1) - f_n(n)\,] + [\varphi_n(n)\quad \varphi_n(n-1)] \end{array}\right\} \ldots\ldots (10A.)$$

Сложивъ отдѣльно выраженія (9) и (10), мы получимъ двѣ суммы, которыя будутъ ближе къ дѣйствительному числу смертныхъ случаевъ въ треугольникахъ OTQ и OPQ, чѣмъ величины опредѣленныя при помощи формулъ §§ 31 и 32.

§ 37. На основаніи формулъ предыдущихъ параграфовъ можно непосредственно интерполировать главныя совокупности второго рода вмѣсто того, чтобы получать ихъ черезъ сложеніе основныхъ совокупностей.

Въ самомъ дѣлѣ, какъ уже извѣстно, совокупность умершихъ, изображенная на чертежѣ въ видѣ трапеціи $T''T'Q'Q''$, равна

$$[\,mf_g(m) - lf_g(l)\,] - [\varphi_g(m) - \varphi_g(l)]. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

гдѣ m и l означаютъ предѣлы времени наблюденія и возраста или разстоянія точекъ T'', Q'' и T', Q' отъ точки O.

Если станемъ дѣлить эту совокупность на части линіями параллельными оси OY, то, проведя линію $O'Y'$, мы подобнымъ же образомъ найдемъ, что число смертныхъ случаевъ въ трапеціи $T''T'''R''R'$, будетъ

$$[\,kf_g(k) - hf_g(h)\,] - [\,\varphi_g(k) - \varphi_g(h)\,] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

гдѣ k и h выражаютъ разстоянія точекъ T''. R'' и T''. R' отъ точки O'.

Вычтя выраженіе (d) изъ выраженія (c), мы получимъ число смертныхъ случаевъ въ параллелограммѣ $R'R''Q''Q'$, представляющемъ одну изъ главныхъ совокупностей второго рода. Это число равно

$$[mf_g(m) - lf_g(l)\,] - [kf_g(k) \quad hf_g(h)\,] \quad [\varphi_g(m) \quad \varphi_g(l)\,] + [\varphi_g(k) - \varphi_g(h)\,] \quad (e)$$

Если положимъ

$$k = m - 1.$$

$$h = l \quad 1.$$

то выраженіе (e) приметъ видъ:

$$[mf_g(m) - lf_g(l)\,] \quad [\,(m-1)f_g(m-1) - (l-1)f_g\ (l-1)\,]$$

$$- [\,\varphi_g(m) - \varphi_g(l)\,] + [\,\varphi_g(m-1) - \varphi_g(l-1)\,] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (f)$$

Полагая здѣсь послѣдовательно $m = 2, 3, 4 \ldots m$, а $l = 1, 2, 3 \ldots m-1$ получимъ рядъ нижеслѣдующихъ значеній для главныхъ совокупностей второго рода въ предположеніи, что какъ время рожденія, такъ и время смерти умершихъ въ каждой совокупности равно единицѣ:

$$
\left.
\begin{array}{l}
[2f_g(2) - 2f_g(1)] - [\varphi_g(2) - 2\varphi_g(1) + \varphi_g(0)] \\
[3f_g(3) - 4f_g(4) + f_g(1)] - [\varphi_g(3) - 2\varphi_g(2) + \varphi_g(1)] \\
[4f_g(4) - 6f_g(3) + 2f_g(2)] - [\varphi_g(4) - 2\varphi_g(3) + \varphi_g(2)] \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
[mf_g(m) - 2(m-1)f_g(m-1) + (m-2)f_g(m-2)] - \\
\qquad - [\varphi_g(m) - 2\varphi_g(m-1) + \varphi_g(m-2)]
\end{array}
\right\} \quad . \quad (11)
$$

Такъ какъ первая основная совокупность на первомъ году жизни не входитъ въ составъ главныхъ совокупностей второго рода, въ чемъ можно убѣдиться на чертежѣ (черт. IV), то для полученія, въ случаѣ надобности, полнаго итога смертныхъ случаевъ, происшедшихъ въ теченіи единицы времени изъ родившихся въ продолженіи времени m, нужно предыдущій рядъ дополнить членомъ $f_g(1) - [\varphi_g(1) - \varphi_g(0)]$, представляющемъ упомянутую основную совокупность.

III.

§ 38. Покажемъ теперь приложеніе нашихъ формулъ къ частнымъ случаямъ, употребляя для интерполлированія алгебраическую цѣлую функцію.

Если $y_1, y_2, y_3 \ldots y_n$ представляютъ значенія независимой перемѣнной, для которыхъ извѣстны значенія функціи $z_1, z_2, z_3 \ldots z_n$, то, по формулѣ Лагранжа, какое угодно значеніе функціи z выразится слѣдующимъ образомъ:

$$z = z_1 \frac{(y-y_2)(y-y_3)(y-y_4)\ldots(y-y_n)}{(y_1-y_2)(y_1-y_3)(y_1-y_4)\ldots(y_1-y_n)} + z_2 \frac{(y-y_1)(y-y_3)(y-y_4)\ldots(y-y_n)}{(y_2-y_1)(y_2-y_3)(y_2-y_4)\ldots(y_2-y_n)}$$
$$+ z_3 \frac{(y-y_1)(y-y_2)(y-y_4)\ldots(y-y_n)}{(y_3-y_1)(y_3-y_2)(y_3-y_4)\ldots(y_3-y_n)} + \ldots \quad (1)$$
$$+ z_n \frac{(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)\ldots(y-y_{n-1})}{(y_n-y_1)(y_n-y_2)(y_n-y_3)\ldots(y_n-y_{n-1})}$$

Какъ показываетъ наблюденіе, смертность особенно быстро убываетъ на первомъ году жизни, значительно слабѣе на второмъ, еще менѣе—на третьемъ и т. д., въ высшихъ-же возрастахъ она измѣняется настолько незначительно, что безъ большой погрѣшности можетъ быть принята постоянною въ предѣлахъ возраста, различающихся на годъ. Чѣмъ быстрѣе совершаются измѣненія какой-либо величины, тѣмъ болѣе надо имѣть, говоря вообще, частныхъ извѣстныхъ ея значеній, чтобы формула (1) давала результаты близкіе къ дѣйствительности. Но вмѣстѣ съ умноженіемъ числа частныхъ значеній функціи повышается ея степень, и становится затруднительнымъ

практическое ея приложеніе. Поэтому, удобнѣе производить интерполлированіе при помощи формулъ, которыя охватывали бы не очень большіе возрастные промежутки. Мы будемъ интерполлировать требуемыя величины по годовымъ возрастамъ, начиная съ умершихъ по первому году жизни, затѣмъ переходя къ умершимъ по второму году, по третьему и т. д.

§ 39. Выше уже было упомянуто, что въ русской статистикѣ умершіе по первому году распредѣляются на слѣдующія частныя группы:

Возрастъ.	*Итоги умершихъ.*
Отъ рожденія до 1 мѣсяца	a
„ 1 до 3 мѣсяцевъ	b
„ 3 до 6 „	c
„ 6 до 12 „	d

. . . (I)

Выражая мѣсяцы въ доляхъ года и принимая во вниманіе, что въ нашемъ случаѣ

$$z_1 = a$$

$$z_2 = a + b$$

$$z_3 = a + b + c$$

$$z_4 = a + b + c + d,$$

мы получимъ слѣдующую интерполляціонную формулу для числа умершихъ:

$$z = a \frac{(y - 1/4)(y - 1/2)(y - 1)}{(1/12 - 1/4)(1/12 - 1/2)(1/12 - 1)} + (a+b) \frac{(y - 1/12)(y - 1/2)(y - 1)}{(1/4 - 1/12)(1/4 - 1/2)(1/4 - 1)} +$$

$$+ (a+b+c) \frac{(y - 1/12)(y - 1/4)(y - 1)}{(1/2 - 1/12)(1/2 - 1/4)(1/2 - 1)} + (a+b+c+d) \frac{(y - 1/12)(y - 1/4)(y - 1/2)}{(1 - 1/12)(1 - 1/4)(1 - 1/2)}$$

или

$$z = -{}^{16}/_{55}\, a\,(8y^3 - 14y^2 + 7y - 1) + {}^{4}/_{3}(a+b)(24y^3 - 38y^2 + 15y - 1) -$$

$$- {}^{2}/_{5}(a+b+c)(48y^3 - 64y^2 + 17y - 1) + {}^{1}/_{33}(a+b+c+d)(96y^3 - 80y^2 + 18y - 1).$$

Взявъ производную отъ этого выраженія, помноживъ ее на y и проинтегрировавъ въ предѣлахъ отъ 0 до 1, мы получимъ одну изъ искомыхъ совокупностей M_1':

$$M_1' = \int_0^1 \frac{dz}{dy} y\,dy,$$

$$M_1' = -{}^{108}/_{35}\, a \int_0^1 (8y^3 - 14y^2 + 7y - 1)\,dy + {}^{4}/_{3}(a+b)\int_0^1 (24y^3 - 38y^2 + 15y - 1)\,dy +$$

$$+ {}^{2}/_{5}(a+b+c)\int_0^1 (48y^3 - 64y^2 + 17y - 1)\,dy +$$

$$+ {}^{1}/_{33}(a+b+c+d)\int_0^1 (96y^3 - 80y^2 + 18y - 1)\,dy$$

$$M_1' = {}^{109}/_{330}\, a + {}^{4}/_{18}(a+b) - {}^{2}/_{30}(a+b+c) + {}^{1}/_{99}(a+b+c+d).$$

Приводя дроби къ одному знаменателю, и соединивъ соотвѣтствующіе члены найдемъ:

$$M_1' = \frac{324\,b + 104\,c + 830\,d}{990} = \frac{162\,b + 52\,c + 415\,d}{495} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Если вычтемъ эту величину изъ общаго итога смертныхъ случаевъ въ возрастѣ до одного года, то есть изъ $a+b+c+d$, то получимъ другую основную совокупность:

$$M_1'' = a + \frac{666\,b + 886\,c + 160\,d}{990} = a + \frac{333\,b + 443\,c + 80\,d}{495} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

§ 40. Чтобы убѣдиться, въ какой мѣрѣ эти формулы согласуются съ дѣйствительностью, мы сравнили *вычисленныя* совокупности съ *наблюденными* для нѣкоторыхъ изъ тѣхъ государствъ, гдѣ статистическій матеріалъ объ умершихъ разработывается въ видѣ основныхъ совокупностей. Въ нижеслѣдующей таблицѣ приведены результаты вычисленій и наблюденій для Пруссіи за время съ 1876 по 1886 годъ, а вмѣстѣ съ

тѣмъ дапы разности между тѣми и другими показаніями въ абсолютныхъ числахъ и въ процентахъ къ общему итогу обѣихъ совокупностей, причемъ верхній знакъ, поставленный передъ каждою разностью, показываетъ, нужно ли къ истинной величинѣ основной совокупности, стоящей первою, прибавить данную разность или же вычесть ее, чтобы получить соотвѣтствующую *вычисленную* совокушность, а нижній знакъ имѣетъ такое же значеніе по отношенію къ совокупности, стоящей второю.

ТАБЛИЦА I.

Годы.	Мужскаго пола.					Женскаго пола.				
	Число умершихъ до 1 года.	Основныя совокупности.		Разность между вычисленіемъ и наблюденіемъ		Число умершихъ до 1 года.	Основныя совокупности.		Разность между вычисленіемъ и наблюденіемъ	
		По наблюд	По вычисл.	Абсол.	Въ % къ общему итогу ум. до 1 г.		По наблюд.	По вычисл.	Абсол	Въ % къ общему итогу ум. до 1 г.
1876	115628	79440 36188	80209 35419	+ 769	+0,7	93930	63550 30380	64420 29510	+ 870	+0,9
1877	116431	81857 34574	80296 36135	−1561	−1,4	94551	65692 28859	63999 30552	−1693	−1,8
1878	113542	81301 32241	80059 33483	−1242	−1,1	92020	65235 26785	63668 28352	−1567	−1,7
1879	122568	87879 34689	84849 37719	−2930	−2,4	100770	71065 29705	68034 32736	−3031	−3,0
1880	110876	77503 33373	77626 33250	+ 123	+0,1	90917	63130 27787	62294 28623	− 836	−0,9
1881	118824	84085 34739	82684 36140	−1401	−1,2	96388	67054 29334	65259 31129	−1795	−1,9
1882	119711	82913 36798	82855 36856	− 58	0,0	97520	67036 30484	66113 31407	− 923	−0,9

Годы.	Мужскаго пола. Число умерших до 1 года	Основныя совокупности. По наблюд.	По вычисл.	Разность между вычисленіемъ и наблюденіемъ. Абсол.	Въ % къ общему итогу ум. до 1 г.	Женскаго пола. Число умерших до 1 года.	Основныя совокупности. По наблюд.	По наблюд.	Разность между вычисленіемъ и наблюденіемъ Абсол.	Въ % къ общему итогу ум до 1 г.
1883	123241	87796 35445	85132 38109	∓2664	∓2,2	100750	70838 29912	67876 32874	+2962	+2,9
1884	119643	82851 36792	82617 37026	∓ 234	∓0,2	97517	66622 30895	65722 31795	∓ 900	∓0,9
1885	132778	95112 37666	90588 42190	∓4524	∓3,4	109231	77211 32020	73426 35805	∓3785	∓ 3,5
1886	119044	84070 34974	83404 35640	∓ 666	∓0,6	97272	68050 29222	66588 30684	∓1462	∓ 1,5

Какъ видно изъ этой таблицы, согласіе между вычисленіемъ и наблюденіемъ должно быть признано вполнѣ удовлетворительнымъ. Изъ 22 показаній, въ 9-ти разность между вычисленными и наблюденными величинами составляетъ менѣе 1% общаго годового итога умершихъ въ возрастѣ до 1 года, въ 7-ми она колеблется между 1 и 2%, въ 4-хъ — между 2 и 3% и въ 2-хъ она переходитъ за 3%, причемъ наибольшая относительная величина ея достигаетъ только 3,5%.

Затѣмъ изъ таблицы видно, что формула даетъ для однородныхъ совокупностей значенія, которыя уклоняются отъ истинныхъ въ большинствѣ случаевъ въ одну сторону, то есть постоянно большія или меньшія, сравнительно съ наблюденными. Исключенія представляютъ лишь три случая.

§ 41. Сравненіе вычисленныхъ и наблюденныхъ показаній для Голландіи за 1880—1888 годы даетъ слѣдующая таблица, содержащая тѣ же подробности, что и таблица для Пруссіи:

ТАБЛИЦА II.

Годы.	Мужскаго пола. Число умершихъ до 1 года	Основныя совокупности: По наблюд.	По вычисл.	Разность между вычисленіемъ и наблюденіемъ: Абсол.	Въ % къ общему итогу ум. до 1 г.	Женскаго пола. Число умершихъ до 1 года	Основныя совокупности: По наблюд.	По вычисл.	Разность между вычисленіемъ и наблюденіемъ: Абсол.	Въ % къ общему итогу ум. до 1 г.
1880	17545	11884 5661	11609 5936	∓275	∓1,6	13751	9276 4475	8993 4758	∓283	∓2,1
1881	14423	9814 4609	9740 4683	∓ 74	∓0,5	11576	7750 3826	7571 4005	∓179	∓1,5
1882	14269	9592 4677	9578 4691	∓ 14	∓0,1	11309	7574 3795	7345 3964	∓169	∓1,5
1883	15134	10155 4979	10057 5077	∓ 98	∓0,6	11776	7911 3865	7727 4049	∓184	∓1,6
1884	15862	10956 4906	10507 5355	∓449	∓2,8	12895	8772 4123	8293 4602	∓479	∓3,7
1885	14008	9351 4757	9318 4690	± 67	∓0,5	11071	7167 3904	7162 3909	∓ 5	0,0
1886	16126	11223 4903	10701 5425	∓522	∓3,2	12785	8762 4023	8211 4574	∓551	∓4,3
1887	13525	9070 4455	9061 4464	∓ 9	∓0,1	10719	7118 3601	7070 3649	∓ 48	∓0,5
1888	14499	9821 4678	9575 4924	∓246	∓1,7	11676	7703 3973	7530 4146	∓173	∓1,5

Результаты получаются столь же удовлетворительные, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, а именно, изъ 18 показаній въ 7-ми разность между вычисленіемъ и наблюденіемъ составляетъ менѣе 1% общаго итога смертныхъ случаевъ, въ 6-ти она колеблется между 1 и 2%, въ 2-хъ—между 2 и 3%, въ 2-хъ—между 3 и 4% и наконецъ, въ одномъ превышаетъ 4%. Только высшій предѣлъ процентнаго уклоненія вычисленныхъ значеній отъ истинныхъ для Голландіи нѣсколько больше чѣмъ для Пруссіи и достигаетъ 4,3%.

§ 42. Мы еще приведемъ вычисленія для Норвегіи за годы 1876—1885. Эти вычисленія показываютъ, что наша формула даетъ значенія близкія къ дѣйствительности даже при небольшомъ числѣ наблюденій, колеблющимся между 3,000 и 4,000, какъ въ данномъ случаѣ *).

ТАВЛИЦА III.

Годы.	Мужскаго пола.					Женскаго пола.				
	Число умершихъ до 1 года.	Основныя совокупности.		Разность между вычисленіемъ и наблюденіемъ.		Число умершихъ до 1 года.	Основныя совокупности.		Разность между вычисленіемъ и наблюденіемъ.	
		По наблюд.	По вычислен.	Абсол.	Въ % къ общему итого ум. до 1 г.		По наблюд.	По вычислен.	Абсол.	Въ % къ общему итого ум. до 1 г.
1876	3428	2383 1045	2371 1057	∓12	∓ 0,4	2807	1855 952	1871 936	±16	± 0,6
1877	3510	2343 1167	2432 1078	±89	± 2,5	2784	1819 965	1880 904	±61	± 2,2
1878	3388	2316 1072	2312 1076	∓ 4	± 0,1	2703	1776 927	1795 908	±19	± 0,7
1879	3202	2238 964	2273 929	±35	± 1,1	2401	1599 802	1641 760	±42	± 1,8

*) Надо притомъ еще замѣтить, что для Норвегіи мы не имѣли вполнѣ точнаго распредѣленія умершихъ до 1 года по возрастамъ, ибо нѣкоторая часть ихъ (до 70 случаевъ) показана въ таблицахъ по движенію населенія (Tabeller vedkommende Folkemaengdens Bevaegelse) безъ означенія возрастовъ. Эту часть мы распредѣлили пропорціонально имѣвшимся возрастнымъ группамъ.

Годы.	Мужскаго пола.					Женскаго пола.				
	Число умершихъ до 1 года.	Основныя совокупности.		Разность между наблюденіемъ и вычисленіемъ.		Число умершихъ до 1 года.	Основныя совокупности.		Разность между наблюденіемъ и вычисленіемъ.	
		По наблюд.	По вычисл.	Абсол	Въ % къ общему итого ум до 1 г.		По наблюд.	По вычисл.	Абсол.	Въ % къ общему итого ум до 1 г.
1880	3111	2267 844	2138 973	∓129	∓4,1	2539	1760 779	1709 839	∓60	∓2,3
1881	3069	2066 1003	2136 933	+ 70	±2,2	2511	1662 849	1681 830	+19	±0,8
1882	3639	2443 1196	2451 1188	± 8	±0,3	2883	1845 1038	1813 1070	∓32	∓1,1
1883	3243	2219 1024	2263 980	± 44	±1,3	2498	1659 839	1680 818	+21	±0,9
1884	3290	2330 960	2328 962	∓ 2	0,0	2585	1771 814	1734 851	+37	∓1,4
1885	3169	2157 1012	2208 961	± 51	±1,6	2529	1662 867	1708 821	±46	±1,8

Не смотря на малость итоговъ, оказывается, что и въ этой таблицѣ распредѣленіе уклоненій вычисленныхъ величинъ отъ наблюденныхъ приблизительно такое же, какъ и въ двухъ первыхъ. Изъ общаго числа 20-ти показанія, въ 8-ми уклоненія не достигаютъ 1% всего итога умершихъ, въ 7-ми они лежатъ между 1% и 2%, въ 4-хъ—между 2% и 3% и въ 1-мъ переходятъ за 4%, составляя 4,5%.

§ 43. Изъ сопоставленій всѣхъ трехъ таблицъ можно вывести, что изъ 100 случаевъ въ 40 уклоненія не переходятъ за 1%, въ 32—35 не переходятъ за 2% и въ остальныхъ 25-ти относительная величина уклоненій превосходитъ 2%. Если же раздѣлить уклоненія на два класса—меньшія 2% и большія 2%, то первыя составятъ $^3/_4$ всего числа случаевъ, а вторыя—лишь $^1/_4$.

§ 44. Вмѣсто итоговъ умершихъ въ возрастахъ 1, 3, 6 и 12 мѣсяцевъ можно употребить для интерполированія основныхъ совокупностей на первомъ году жизни показанія, соотвѣтствующія другимъ возрастамъ. Ограничиваясь не болѣе какъ четырьмя частными значеніями функціи, то есть продолжая примѣнять для интерполированія цѣлый полиномъ третьей степени, мы приводимъ формулы для опредѣленія совокупностей посредствомъ итоговъ умершихъ въ нижеслѣдующихъ возрастахъ:

Возрастъ.	*Итогъ умершихъ.*		*Возрастъ.*	*Итогъ умершихъ.*	
0— 3 мѣс.	a		0— 3 мѣс.	a'	
3— 6 „	b	(II).	3—12 „	b'	(III).
6—12 „	c		12—24 „	c'	
12—24 „	d		24—36 „	d'	

Выразивъ мѣсяцы черезъ годы, мы для каждаго изъ этихъ случаевъ найдемъ слѣдующіе полиномы:

$$z = -{}^{32}/_{21}a\,(2y^3-7y^2+7y-2)+{}^{4}/_{3}(a+b)\,(4y^3-13y^2+11y-2)$$

$$-{}^{1}/_{3}(a'+b'+c')\,(8y^3+22y^2+13y-2)+{}^{1}/_{21}\,(a+b+c+d)\,(8y^3-14y^2+7y-1)$$

$$z' = {}^{64}/_{231}a'\,(y^3-6y^3+11y-6)+{}^{1}/_{6}(a'+b')\,(4y^3-21y^2+29y-6)$$

$$-{}^{1}/_{7}(a'+b'+c')\,(4y^3-17y^2+16y-3)+{}^{1}/_{22}(a'+b'+c'+d')\,(4y^3-13y^2+11y-2)$$

Пользуясь этими формулами, мы получимъ для основныхъ совокупностей соотвѣтственно слѣдующія значенія:

$$M'_1=\frac{64\,b+92\,c+d}{126} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$M''_1 = a+b+c \quad \frac{64\,d+92\,c+d}{126} = a+\frac{62\,b+34\,c-d}{126} \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$M'_2 = \frac{576\,b'+37\,c'}{924} \quad \frac{7d'}{} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

$$M''_2 = a'+b'-\frac{576\,b'+37\,c'-7\,d'}{924} = a'+\frac{348b'-37c'+7d'}{924}. \quad (7)$$

§ 45. Въ слѣдующей таблицѣ показаны подъ рубриками II и III для каждой изъ трехъ разсматриваемыхъ странъ разности какъ абсолютныя, такъ и относительныя между вычисленными по этимъ формуламъ и наблюденными величинами основныхъ совокупностей, причемъ для удобства сравненія мы помѣстили подъ рубрикою I также разности между вычисленіемъ и наблюденіемъ, полученныя выше при употребленіи формулъ (2) и (3) (§ 39).

ТАБЛИ

Годы и полъ.		Пруссія. Разность между вычисленіемъ и наблюденіемъ. Абсолютная. I	II	III	Въ % къ общему итогу умершихъ до 1 года. I	II	III	Голлан Разность между вычисле Абсолютная. I	II	III
1876	м.	± 769	+2378	+1988	± 0,7	± 2,1	± 1,6	—	—	—
	ж.	± 870	+ 1463	±1277	± 0,9	± 1,6	± 1,4	—	—	—
1877	м.	+1561	+ 5	∓ 382	+ 1,4	0,0	∓0,3	—	—	—
	ж.	∓1693	∓ 314	∓ 569	∓ 1,8	∓0,3	∓0,6	—	—	—
1878	м.	+ 1242	± 219	∓ 295	∓ 1,1	± 0,2	∓0,2	—	—	—
	ж.	∓1567	∓ 548	± 417	∓ 1,7	∓0,6	± 0,5	—	—	—
1879	м.	∓2930	∓1613	∓2023	∓ 2,4	∓ 1,3	∓ 1,6	—	—	—
	ж.	∓3031	+ 1682	+ 1088	∓ 3,0	∓ 1,7	∓ 1,1	—	—	—
1880	м.	± 123	+ 1446	+ 1084	± 0,1	± 1,3	± 1,0	+275	∓369	+530
	ж.	∓ 836	± 445	± 247	∓ 0,9	± 0,5	± 0,3	+283	∓305	∓536
1881	м.	∓1401	± 16	∓ 427	∓ 1,2	0,0	∓ 0,4	∓ 74	∓142	∓287
	ж.	∓1795	∓ 249	∓ 489	∓ 1,9	∓ 0,2	∓ 0,5	∓179	∓208	∓309
1882	м.	∓ 58	∓1335	± 911	0,0	± 1,1	± 0,8	∓ 14	∓ 45	∓178
	ж.	∓ 923	± 451	± 158	∓ 0,9	± 0,5	± 0,2	∓169	∓245	∓334
1883	м.	∓2664	∓1241	∓2672	∓ 2,2	∓ 1,0	∓ 2,1	∓ 98	∓ 68	∓189
	ж.	∓2962	+ 1634	∓1914	∓ 2,9	+ 1,6	∓ 1,9	∓184	∓232	∓342
1884	м.	∓ 234	± 963	± 596	∓ 0,2	± 0,8	± 0,5	∓449	∓466	+605
	ж.	∓ 900	± 314	± 89	∓ 0,9	± 0,3	± 0,1	∓479	∓484	∓576
1885	м.	∓4524	∓2936	∓3329	∓ 3,4	∓ 2,2	∓ 2,5	± 67	± 82	∓ 21
	ж.	∓3785	+ 2929	∓3157	∓ 3,5	∓ 2,7	∓ 2,9	∓ 5	∓ 22	∓107
1886	м.	∓ 666	± 603	± 117	∓ 0,6	+ 0,5	± 0,1	∓522	∓496	∓688
	ж.	∓1462	∓ 220	∓ 540	∓ 1,5	∓ 0,2	∓ 0,5	∓551	∓601	∓681
1887	м.	—	—	—	—	—	—	∓ 9	± 89	± 1
	ж.	—	—	—	—	—	—	∓ 48	∓102	∓190
1888	м.	—	—	—	—	—	—	∓246	∓158	∓230
	ж.	—	—	—	—	—	—	+ 173	∓199	∓280

Ц А IV.

Индія.			Норвегія.					
ніемъ и наблюденіемъ.			Разность между вычисленіемъ и наблюденіемъ.					
Въ % къ общему итогу умершихъ до 1 года.			Абсолютныя.			Въ % къ общему итогу умершихъ до 1 года.		
I	II	III	I	II	III	I	II	III
—	—	—	∓ 12	± 28	± 28	∓ 0,4	± 0,8	± 0,8
—	—	—	± 16	± 60	± 63	± 0,6	+ 2,1	± 2,2
—	—	—	± 89	±139	±139	± 2,5	± 4,0	+ 4,0
—	—	—	± 61	±112	±110	± 2,2	± 4,0	+ 4,0
—	—	—	∓ 4	± 51	± 48	∓ 0,1	+ 1,5	± 1,4
—	—	—	± 19	± 52	± 57	± 0,7	+ 1,9	± 2,1
—	—	—	± 35	± 63	± 56	± 1,1	± 2,0	± 1,7
—	—	—	± 42	± 81	± 81	± 1,8	± 4,4	± 4,4
∓ 1,6	∓ 2,1	∓ 3,0	∓129	∓104	∓108	∓ 4,1	∓ 3,3	∓ 3,4
∓ 2,1	∓ 2,2	∓ 3,9	∓ 60	∓ 33	∓ 34	∓ 2,3	∓ 1,3	∓ 1,3
∓ 0,5	∓ 1,0	∓ 2,0	± 70	±121	±112	± 2,2	± 4,0	± 3,6
∓ 1,5	∓ 1,8	∓ 2,7	± 19	± 60	± 61	± 0,8	± 2,4	± 2,4
∓ 0,1	∓ 0,3	∓ 1,2	± 8	± 98	±100	± 0,3	± 2,7	± 2,8
∓ 1,5	+ 2,1	∓ 3,0	+ 32	± 41	± 52	∓ 1,1	± 1,4	± 1,8
∓ 0,6	∓ 0,4	∓ 1,2	± 44	± 95	± 92	± 1,3	± 2,9	± 2,8
∓ 1,6	∓ 2,0	∓ 3,0	± 21	± 72	± 75	± 0,9	± 2,9	± 3,0
∓ 2,8	∓ 3,0	∓ 3,8	∓ 2	± 38	± 30	0,0	± 1,2	± 0,9
∓ 3,7	∓ 3,8	∓ 4,5	∓ 37	± 15	± 20	∓ 1,4	± 0,6	± 0,8
± 0,5	± 0,7	∓ 0,2	± 51	±134	±122	± 1,6	± 4,2	± 4,0
0,0	∓ 0,2	∓ 1,0	± 46	± 77	± 76	± 1,8	± 3,0	± 3,0
∓ 3,2	∓ 3,1	∓ 4,2	—	—	—	—	—	—
∓ 4,3	∓ 4,7	∓ 5,3	—	—	—	—	—	—
∓ 0,1	± 0,7	0,0	—	—	—	—	—	—
∓ 0,5	∓ 1,0	∓ 1,8	—	—	—	—	—	—
∓ 1,7	∓ 1,1	∓ 1,6	—	—	—	—	—	—
∓ 1,5	∓ 1,7	∓ 2,4	—	—	—	—	—	—

Таблица показываетъ, что для Пруссіи формулы, основанныя на комбинаціяхъ возрастовъ (II) и (III), даютъ лучшіе результаты, чѣмъ формулы, выведенныя при комбинаціи (I); для Голландіи же и Норвегіи наоборотъ—основныя совокупности, вычисленныя при помощи комбинаціи (I), ближе къ истиннымъ, чѣмъ тѣ же совокупности, даваемыя посредствомъ комбинацій (II) и (III). Раздѣляя въ видахъ большей наглядности уклоненія вычисленныхъ величинъ отъ наблюдаемыхъ только на два разряда — меньшія и большія $2^0/_0$ общаго итога умершихъ, мы получимъ, что изъ 100 уклоненій того и другого рода приходится:

	Число уклоненій меньшихъ $2^0/_0$.			Число уклоненій большихъ $2^0/_0$.		
	При комбинаціяхъ:			*При комбинаціяхъ:*		
	I	II	III	I	II	III
Въ Пруссіи . . .	73	87	87	27	13	13
„ Голландіи . .	73	56	33	27	44	67
„ Норвегіи. . .	75	35	35	25	65	65

Вообще, какъ видимъ, при малыхъ итогахъ умершихъ выгоднѣе, сохраняя то же число частныхъ значеній функціи, брать эти значенія по возможности ближе другъ къ другу.

§ 46. Мы примѣнимъ еще къ опредѣленію основныхъ совокупностей формулы §§ 35 и 36, полагая въ основаніе вычисленій не годовые итоги умершихъ въ разныхъ возрастахъ, а данныя, представляющія возрастное распредѣленіе умершихъ по отдѣльнымъ мѣсяцамъ года. Изъ трехъ разсматриваемыхъ странъ такія вычисленія можно произвести только для Голландіи, ибо ни въ Пруссіи, ни въ Норвегіи не имѣется совмѣстнаго распредѣленія умершихъ по возрастамъ и мѣсяцамъ года.

Мы выведемъ формулы для двухъ случаевъ: 1) когда даны по каждому календарному мѣсяцу итоги умершихъ a,b,c,d, для возрастовъ въ комбинаціи (I), то есть для

0— 1 мѣс.
1— 3 „
3— 6 „
6—12 „

и 2) когда даны по каждому календарному мѣсяцу итоги умершихъ a', b', c', d', для возрастовъ въ комбинаціи (II) то есть для

0— 3 мѣс.

3— 6 „

6—12 „

12—24 „

Въ первомъ случаѣ числа смертныхъ случаевъ, входящія въ составъ искомыхъ годовыхъ основныхъ совокупностей перваго и второго рода изъ общаго итога умершихъ въ каждомъ мѣсяцѣ выражаются слѣдующимъ образомъ:

	Части мѣсячныхъ итоговъ приходящіяся на **годовую** *основную совокупность перваго рода:* (8)	*Части мѣсячныхъ итоговъ приходящіяся на* **годовую** *основную совокупность втораго рода:* (9)
Январь . .	$a-\frac{16119b-5716c+455d}{35640}$	$\frac{51759b+29924c+36095d}{35640}$
Февраль . .	$a+\frac{12231b-2564c+175d}{35640}$	$\frac{23409b+38204c+35465d}{35640}$
Мартъ	$a+\frac{29869b-2396c+145d}{35640}$	$\frac{5751b+38036c+35495d}{35640}$
Апрѣль . .	$a+\frac{38799b+4204c-185d}{35640}$	$\frac{-3159b+31436c+35825d}{35640}$
Май	$a+\frac{40815b+15220c-455d}{35640}$	$\frac{5175b+20420c+36095d}{35640}$
Іюнь . . .	$a+\frac{38151b+28636c-305d}{35640}$	$\frac{-2511b+7004c+35945d}{35640}$
Іюль . . .	$a+\frac{32481b+42436c-625d}{35640}$	$\frac{3159b-6796c+35015d}{35640}$
Августъ . .	$a+\frac{25839b+54504c+2695d}{35640}$	$\frac{9801b-18964c+32945d}{35640}$
Сентябрь .	$a+\frac{20169b+63124c+6265d}{35640}$	$\frac{15471b-27484c+29375d}{35640}$
Октябрь . .	$a+\frac{17415b+65980c+11695d}{35640}$	$\frac{18225b-30340c+23945d}{35640}$
Ноябрь . .	$a+\frac{19521b+61156c+19345d}{35640}$	$\frac{16119b-25516c+16295d}{35640}$
Декабрь . .	$a+\frac{28431b+46636c+29575d}{35640}$	$\frac{7209b-10996c+6065d}{35640}$

Во второмъ случаѣ части мѣсячныхъ итоговъ, падающія на тѣ и другія основныя совокупности, будутъ выражаться:

	Части мѣсячныхъ итоговъ, приходящіяся на основную совокупность перваго рода.	*Части мѣсячныхъ итоговъ, приходящіяся на основную совокупность второго рода.*
Январь . .	$a' - \frac{29528b' - 8482c' + 639d'}{18144}$	$\frac{47672b' + 9662c' + 639d'}{18144}$
Февраль. .	$a' - \frac{15976b' - 4030c' + 289d'}{18144}$	$\frac{34120b' + 14114c' + 289d'}{18144}$
Мартъ. . .	$a' - \frac{4824b' - 1042c' + 71d'}{18144}$	$\frac{22968b' + 17102c' + 71d'}{18144}$
Апрѣль . .	$a' + \frac{4120b' - 626c' + 39d'}{18144}$	$\frac{14024b' + 18770c' - 39d'}{18144}$
Май. . . .	$a' + \frac{11048b' - 1118c' + 65d'}{18144}$	$\frac{7096b' + 19262c' - 65d'}{18144}$
Іюнь . . .	$a' + \frac{16152b' - 578c' + 31d'}{18144}$	$\frac{1992b' + 18722c' - 31d'}{18144}$
Іюль . . .	$a' + \frac{19624b + 850c' - 39d'}{18144}$	$\frac{-1480b' + 17294c' + 39d'}{18144}$
Августъ. .	$a' + \frac{21656b' + 3022c' - 121d'}{18144}$	$\frac{-3512b' + 15122c' + 121d'}{18144}$
Сентябрь .	$a' + \frac{22440b' + 5794c' - 191d'}{18144}$	$\frac{-4296b' + 12350c' + 191d'}{18144}$
Октябрь. .	$a' + \frac{22168b' + 9022c' - 225c'}{18144}$	$\frac{-4024b' + 9122c' + 225d'}{18144}$
Ноябрь . .	$a' + \frac{21032b' + 12562c' - 199d'}{18144}$	$\frac{-2888b' + 5582c' + 199d'}{18144}$
Декабрь. .	$a' + \frac{19224b' + 16270c' - 89d'}{18144}$	$\frac{-1080b' + 1874c' + 89d'}{18144}$

(10) (11)

§ 47. Сложивъ опредѣленныя посредствомъ этихъ формулъ итоги умершихъ, приходящіеся на каждый календарный мѣсяцъ изъ родившихся того и другого календарнаго года, мы найдемъ число смертныхъ случаевъ въ основныхъ совокупностяхъ обоихъ родовъ. Въ слѣдующей таблицѣ показаны для Голландіи разницы между вычисленными по этимъ формуламъ величинами и свѣдѣніями, непосредственно данными регистраціей — какъ въ абсолютныхъ числахъ, такъ и въ процентахъ къ общему итогу умершихъ до 1 года:

ТАБЛИЦА V.

Годы и полъ.		Разность между вычисленіемъ и наблюденіемъ.			
		Абсолютныя.		Въ % къ общему итогу умер. до 1 года.	
		I.	II.	I.	II.
1880	м.	± 182	± 197	± 1,0	± 1,1
	ж.	± 32	± 88	± 0,2	± 0,6
1881	м.	± 127	± 222	± 0,9	± 1,9
	ж.	± 152	± 150	± 1,0	± 1,3

Годы и полъ.		Разность между вычисленіемъ и наблюденіемъ.			
		Абсолютная.		Въ % къ общему итогу умершихъ до 1 года	
		I	II	I	II
1882	м.	± 55	± 85	± 0,4	+ 0,7
	ж.	± 46	+109	± 0,3	+ 1,0
1883	м.	±152	± 30	± 1,0	+ 0,2
	ж.	± 49	+ 58	± 0,3	± 0,5
1884	м.	± 64	±114	± 0,4	± 0,9
	ж.	±112	±146	± 0,7	± 1,1
1885	м.	±148	+ 9	± 1,0	0,0
	ж.	± 86	±170	± 0,6	± 1,5
1886	м.	± 73	±114	± 0,4	± 0,9
	ж.	± 8	± 87	0,0	± 0,6
1887	м.	+ 59	± 2	± 0,4	0,0
	ж.	+ 86	∓ 13	± 0,7	0,0
1888	м.	+ 23	±111	± 0,2	+ 0,8
	ж.	± 92	± 20	± 0,8	± 0,2

Уже первый взглядъ на эту таблицу обнаруживаетъ большую близость вычисленныхъ значеній къ наблюденнымъ, чѣмъ при примѣненіи прежнихъ формулъ. Чтобы оцѣнить точнѣе степень приблизительности тѣхъ и другихъ формулъ, мы даемъ ниже табличку, въ которой показано число найденныхъ значеній уклоняющихся отъ истинныхъ на величину меньшую 1% всего итога умершихъ, на величину въ 1%—2%, на величину въ 2%—3% и т. д. въ обоихъ случаяхъ:

Величина уклоненій.	Число уклоненій.			
	При употребленіи годовыхъ *итоговъ въ комбинаціяхъ возрастовъ:*		*При употребленіи* мѣсячныхъ *итоговъ въ комбинаціяхъ возрастовъ:*	
	(I)	(II)	(I)	(II)
Менѣе 1%	7	5	14	12
Отъ 1%—2%	6	5	4	6
„ 2%—3%	2	4	—	—
„ 3%—4%	2	3	—	—
Свыше 4%	1	1	—	—

Такимъ образомъ, уклоненія при употребленіи мѣсячныхъ итоговъ умершихъ не превосходятъ $2^0/_0$, большею же частью имѣютъ величины меньшія $1^0/_0$, тогда какъ формулы, выведенныя на основаніи распредѣленія умершихъ по возрастамъ въ цѣломъ году, даютъ уклоненія, достигающія $4^0/_0 - 6^0/_0$. При этомъ слѣдуетъ принять во вниманіе, что въ Голландіи мы имѣемъ дѣло съ довольно малыми мѣсячными итогами умершихъ въ разныхъ возрастахъ, въ рѣдкихъ случаяхъ переходящими за 500. Нужно думать, что при болѣе значительныхъ итогахъ, въ меньшей мѣрѣ подверженныхъ случайнымъ колебаніямъ, результаты вычисленій были-бы еще ближе къ дѣйствительности.

§ 48. Переходимъ къ опредѣленію основныхъ совокупностей для умершихъ по второму году.

Изъ испробованныхъ нами комбинацій возрастовъ, при употребленіи итоговъ для цѣлаго года, наиболѣе удовлетворительные результаты дала слѣдующая:

Возрастъ.	*Итогъ умершихъ.*	
0— 6 мѣс.	a	(IV)
6—12 „	b	
12—24 „	c	
24—36 „	d	

Въ этомъ случаѣ, по переводѣ мѣсяцевъ въ годы, формула Лагранжа будетъ:

$$z = -{}^8/_{15}\,a(y^3-6y^2+11y-6)+{}^1/_2(a+b)(2y^3-11y^3+17y-6)-$$

$$-{}^1/_3(a+b+c)\;(2y^3-9y^2+10y-3)+{}^1/_{10}(a+b+c+d)\;(2y^3\;\;-7y^3+7y-2)$$

Т А В Л И

Годъ и полъ.		Пруссія.					Гол	
		Число умершихъ отъ 1 до 2 лѣтъ	Основныя совокупности		Разность между вычисл и наблюденіемъ.		Число умершихъ отъ 1 до 2 лѣтъ.	Основныя
			По наблюден.	По вычислен	Абсолютн.	Въ $^0/_0$ къ общ. итогу ум. 1 2 л.		По наблюден.
1876	м.	29246	16598 12648	16112 13134	∓ 486	∓ 1,7	—	—
	ж.	28128	16140 11988	16144 11989	∓ 4	0,0	—	—
1877	м.	29145	16955 12190	17223 11922	∓ 268	∓ 0,9	—	—
	ж.	28140	16465 11675	16122 12018	∓ 343	∓ 1,2	—	—

Чертежъ (черт. VI) показываетъ, что искомыя совокупности для втораго года жизни изображаются треугольниками Q_1Q_2S' и Q_1Q_2S. Первый треугольникъ

$$Q_1Q_2S' = T_1T_2Q_1Q_2 - T_1T_2Q_1S'.$$

Но трапеція $T_1T_2Q_1Q_2$ на основаніи формулъ (9) § 35 равна

$$[2f(2) - f(1)] - [\varphi(2) - \varphi(1)],$$

а четыреугольникъ $T_1T_2Q_1S'$ есть ничто иное, какъ число умершихъ до одного года, то есть $f(1)$. Поэтому

$$Q_1Q_2S' = [2f(2) - 2f(1)] - [\varphi(2) - \varphi(1)] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Что же касается до треугольника Q_1Q_2S', то на основаніи формулъ (10) 936:

$$Q_1Q_2S = [f(1) - f(2)] + [\varphi(2) - \varphi(1)] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Если вмѣсто $f(1), f(2), \varphi(1), \varphi(2)$ мы вставимъ въ выраженіи (a) и (b) значенія, соотвѣтствующія нашей интерполяціонной формулѣ, то получимъ:

$$Q_1Q_2S' = \frac{4b + 14c - d}{30} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

$$Q_1Q_2S = \frac{-4b + 16c + d}{30} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Сравненіе вычисленныхъ по этимъ формуламъ результатовъ съ наблюденными итогами для трехъ разсматриваемыхъ странъ даетъ слѣдующая таблица:

Ц А VI.

Англія.			Норвегія.				
Совокуп.	Разность между вычисл. и наблюденіемъ.		Число умершихъ отъ 1 до 2 лѣтъ.	Основныя совокупности.		Разность между вычисл. и наблюденіемъ.	
По вычислен.	Абсолютн.	Въ % къ общ. итогу ум. 1—2 л.		По наблюден.	По вычислен.	Абсолютн	Въ % къ общ. итогу ум. 1—2 л.
—	—	—	1101	650	616	∓ 34	∓ 3,1
—				451	485		
—	—	—	994	572	558	∓ 14	∓ 1.4
—				422	436		
—	—	—	1015	553	583	± 30	± 3,0
—				462	432		
—	—	—	940	526	530	± 4	± 0,4
—				414	410		

Годъ и полъ.		Пруссія. Число умершихъ отъ 1 до 2 лѣтъ.	Основныя совокупности. По наблюден	По вычислен.	Разность между вычисл. и наблюденіемъ. Абсолютн	Въ % къ общ итогу ум. 1—2 л.	Голл. Число умершихъ отъ 1 до 2 лѣтъ.	Основныя По наблюден.
1878	м.	25397	14228 11169	15078 10319	±850	± 3,3	—	—
	ж.	24393	13863 10530	14116 10277	±253	± 1,0	—	—
1879	м.	28444	17294 11150	16998 11446	∓296	∓ 1,0	—	—
	ж.	27413	16859 10554	16051 11362	∓808	∓ 2,9	—	—
1880	м.	25968	14947 11021	15325 10643	±378	± 1,4	3897	2275 1622
	ж.	25133	14495 10638	14503 10630	± 8	0,0	3665	2185 1480
1881	м.	28059	16197 11862	16628 11431	+431	± 1,5	3096	1779 1317
	ж.	27233	15777 11446	15748 11485	+ 29	∓ 0,1	3022	1739 1283
1882	м.	27635	16134 11501	16552 11083	±418	± 1,5	3156	1849 1307
	ж.	26476	15481 10995	15470 11006	∓ 11	0,0	2956	1728 1228
1883	м.	29875	17846 12039	17782 12093	∓ 64	∓ 0,2	3396	1957 1439
	ж.	28563	16977 11586	16594 11969	∓383	∓ 1,3	3331	1976 1355
1884	м.	29655	17180 12475	17517 12138	±337	+ 1,1	3880	2310 1570
	ж.	27812	16127 11685	16143 11669	± 16	± 0,1	3679	2216 1463
1885	м.	31788	19240 12548	19103 12685	+137	∓ 0,4	3281	1929 1352
	ж.	30358	18535 11823	17869 12489	∓666	∓ 2,2	3006	1710 1296
1886	м.	26284	14797 11484	15765 10519	±968	+ 3,7	3802	2226 1576
	ж.	24845	14073 10772	14620 10225	±547	± 2,2	3560	2095 1465
1887	м.	—	—	—	—	—	3132	1753 1379
	ж.	—	—	—	—	—	2893	1647 1246
1888	м.	—	—	—	—	—	3467	2112 1355
	ж.	—	—	—	—	—	3374	2030 1344

Данія.				Норвегія.				
совокупн.	Разность между вычисл. и наблюденіемъ.		Число умершихъ отъ 1 до 2 лѣтъ	Основныя совокупности.		Разность между вычисл. и наблюденіемъ.		
По вычислен.	Абсолютн.	Въ % къ общ. итогу ум. 1—2 л		По наблюден.	По вычислен	Абсолютн.	Въ % къ общ итогу ум. 1—2 л.
—	—	—	875	459 416	518 357	± 59	± 6,7
—	—	—	816	467 349	476 340	± 9	± 1,1
—	—	—	745	387 358	439 306	± 52	± 7,0
—	—	—	701	353 348	404 297	± 51	± 7,3
2413 1484	± 138	+ 3,5	834	527 307	490 344	∓ 37	∓ 4,4
2187 1478	± 2	+ 0,1	761	506 255	444 317	∓ 62	∓ 8,2
1899 1197	± 120	± 4,0	994	590 404	554 440	∓ 36	∓ 3,6
1806 1216	± 67	± 2,2	943	528 415	523 420	∓ 5	∓ 0,5
1931 1225	± 82	± 2,6	1198	668 530	675 523	± 7	± 0,6
1780 1176	± 52	± 1,7	1136	665 471	639 497	∓ 26	∓ 2,3
2088 1308	± 131	+ 4,0	941	518 423	532 409	+ 14	± 1,5
1954 1377	∓ 22	∓ 0,7	885	491 394	493 392	± 2	± 0,2
2340 1540	± 30	∓ 0,8	911	498 413	519 392	± 21	± 2,3
2179 1500	∓ 39	∓ 1,1	867	514 353	490 377	∓ 24	∓ 2,7
2001 1280	± 72	+ 2,2	861	517 344	487 374	∓ 30	∓ 3,5
1797 1209	± 87	± 2,8	753	424 329	433 320	± 9	± 1,2
2311 1491	± 85	± 2,2	—	—	—	—	—
2131 1429	± 36	± 1,0	—	—	—	—	—
1900 1232	± 147	± 4,7	—	—	—	—	—
1713 1180	± 66	± 2,3	—	—	—	—	—
2108 1359	∓ 4	∓ 0,1	—	—	—	—	—
2001 1373	+ 29	± 0,9	—	—	—	—	—

Хотя эти результаты въ общемъ должны быть признаны удовлетворительными, но сравненіе съ уклоненіями основныхъ группъ на первомъ году показываетъ, что въ отношеніи точности они вообще стоятъ нѣсколько ниже послѣднихъ.

§ 49. Увеличить точность ихъ можно тѣмъ же пріемомъ, какъ и въ выше разсмотрѣнномъ случаѣ, а именно употребляя для вычисленія не годовые итоги умершихъ въ разныхъ возрастахъ, а мѣсячные. Такое распредѣленіе смертныхъ случаевъ даетъ голландская статистика движенія населенія, въ которой умершіе по второму году жизни показываются для каждаго календарнаго мѣсяца съ слѣдующими возрастными подраздѣленіями:

отъ	12	до	15	мѣс.
„	15	—	18	„
„	18	—	21	„
„	21	—	24	„

Если мы, означивъ мѣсячные итоги умершихъ для каждаго изъ этихъ промежутковъ черезъ a, b, c, d, составимъ интерполяціонную формулу, причемъ, для упрощенія ея, счетъ возрастовъ будемъ вести не отъ момента рожденія, а отъ момента достиженія годового возраста, то найдемъ слѣдующее выраженіе:

$$z = -{}^1/_{162}a(y^3-27y^2+234y-648)+{}^1/_{54}(a+b)(y^3-24y^2+171y-324)$$
$$-{}^1/_{54}(a+b+c)(y^3-21y^2+126y-216)+{}^1/_{162}(a+b+c+d)(y^3-18y^2+99y-162)$$

На основаніи формулъ (9) и (10) §§ 35 и 36 мы получимъ:

	Части мѣсячныхъ итоговъ умершихъ на 2-мъ году приход. на основн. совокупн. 1-го рода.	*Части мѣсячныхъ итоговъ умершихъ на 2-мъ году приход. на основн. совокупн. 2-го рода.*
Январь . .	$a-\frac{1511b-1444c+473d}{648}$	$\frac{2159b-796c+1121d}{648}$
Февраль. .	$a-\frac{777b-660c+207d}{648}$	$\frac{1425b-12c+855d}{648}$
Мартъ . .	$a-\frac{223b-164c+49d}{648}$	$\frac{871b+484c+697d}{648}$
Апрѣль. .	$a+\frac{175b-92c+25d}{648}$	$\frac{473b+740c+623d}{648}$
Май . . .	$a+\frac{441b-156c+39d}{648}$	$\frac{207b+804c+609d}{648}$
Іюнь . . .	$a+\frac{599b-76c+17d}{648}$	$\frac{49b+724c+631d}{648}$
Іюль . . .	$a+\frac{673b+100c-17d}{648}$	$\frac{-25b+548c+665d}{648}$
Августъ. .	$a+\frac{687b+324c-39d}{648}$	$\frac{-39b+324c+687d}{648}$
Сентябрь .	$a+\frac{665b+548c-25d}{648}$	$\frac{-17b+100c+673d}{648}$
Октябрь .	$a+\frac{631b+724c+49d}{648}$	$\frac{17b-76c+599d}{648}$
Ноябрь .	$a+\frac{609b+804c+207d}{648}$	$\frac{39b-156c+441d}{648}$
Декабрь .	$a+\frac{623b+740c+473d}{648}$	$\frac{25b-92c+175d}{648}$

(14) (15)

§ 50 Годовыя основныя совокупности, опредѣленныя по этимъ формуламъ, даетъ слѣдующая таблица:

ТАБЛИЦА VII.

Годы и полъ.		Разность между вычисленіемъ и наблюденіемъ.	
		Абсолютная.	Въ % къ общему итогу умерш. отъ 1 до 2 лѣтъ.
1880	м.	∓ 48	∓ 1,2
	ж.	∓ 14	+ 0,4
1881	м.	± 30	± 1,0
	ж.	∓ 33	∓ 1,1
1882	м.	∓ 1	0,0
	ж.	∓ 35	∓ 1,2
1883	м.	∓ 15	∓ 0,5
	ж.	∓ 65	∓ 1,9
1884	м	∓ 19	∓ 0,5
	ж.	∓ 47	∓ 1,3
1885	м.	± 5	± 0,1
	ж.	+ 39	∓ 1,3
1886	м.	± 24	± 0,6
	ж	∓ 13	∓ 0,4
1887	м.	∓ 53	∓ 1,7
	ж.	∓ 96	∓ 3,3
1888	м.	∓ 21	∓ 0,6
	ж	± 14	± 0,4

Уклоненія итоговъ, вычисленныхъ по послѣднимъ формуламъ, оказываются гораздо меньшими, чѣмъ въ предыдущемъ случаѣ, что легко можно замѣтить изъ слѣдующаго сопоставленія:

Величина уклоненій.		Число уклоненій. По формуламъ (14) и (15).	По формуламъ (12) и (13).
Менѣе	1%	9	5
Отъ	1%—2%	8	3
„	2%—3%	—	6
„	3%—4%	1	1
„	4%—5%	—	3

Или, раздѣляя уклоненія на двѣ группы: — меньшія 2% и большія 2%, найдемъ, что изъ 100 показаній будетъ:

	При употребленіи форм. (14) и (15).	При употребленіи форм. (12) и (13).
Число уклоненій меньшихъ 2%	94	44
„ „ большихъ 2%	6	56

§ 51. Для опредѣленія основныхъ совокупностей умершихъ по третьему году мы воспользуемся интерполляціонною формулою Лагранжа, составленною на основаніи четырехъ итоговъ умершихъ, соотвѣтствующихъ четыремъ возрастамъ, промежутки между которыми равны одному году. При этомъ, каковы-бы ни были данные возрасты, мы, для простоты формулъ, всегда будемъ вести счетъ возрастовъ отъ самаго нисшаго изъ взятыхъ предѣловъ, полагая его равнымъ нулю.

Имѣя итоги умершихъ a. b, c, d умершихъ въ возрастахъ:

Отъ 0 до 1
„ 1 „ 2
„ 2 „ 3
„ 3 „ 4

мы найдемъ для интерполляціонной формулы слѣдующее выраженіе:

$$z=-{}^1/_6 a(y^3-9y^2+26y \quad 24)+{}^1/_2(a+b)(y^3-8y^2+19y-12)$$
$$-{}^1/_2(a+b+c)(y^3-7y^2+14y-8)+{}^1/_6(a+b+c+d)(y^3-6y^2+11y-6).$$

ТАБЛИ

Годъ и полъ.		Пруссія. Число умершихъ отъ 2 до 3 л.	Основныя совокупности. По наблюден.	Основныя совокупности. По вычислен.	Разница между вычисл. и наблюденіемъ. Абсолютн.	Разница между вычисл. и наблюденіемъ. Въ % къ общ. ит. ум. отъ 2 до 3 л.	Гол… Число умершихъ отъ 2 до 3 л.	Основныя… По наблюден.
1878	м.	12568	6568 6000	6718 5850	±150	±1,2	—	— —
	ж.	12062	6397 5665	6440 5622	±43	±0,4	—	— —
1879	м.	13116	7147 5969	7043 6073	∓104	∓0,8	—	— —
	ж.	12904	6989 5915	6934 5970	∓55	∓0,4	—	— —
1880	м.	13061	7178 5883	6935 6126	∓243	∓1,9	1512	857 655
	ж.	12691	6905 5786	6770 5921	∓135	∓1,1	1518	892 626

Посредствомъ этой формулы мы получимъ слѣдующія выраженія для основныхъ совокупностей перваго и второго рода въ каждомъ послѣдовательномъ годовомъ возрастномъ промежуткѣ:

	Основ. совокупн. 1-го рода.		*Основ. совокупн. 2-го рода.*	
Въ первомъ годов. возр. промеж.	$a - {}^{31}/_{24}b + {}^{7}/_{6}c - {}^{3}/_{8}d$	(16)	${}^{31}/_{24}b - {}^{7}/_{6}c + {}^{3}/_{8}d$	(17)
Во второмъ „ „ „	${}^{5}/_{8}b - {}^{1}/_{6}c + {}^{1}/_{24}d$		${}^{3}/_{8}b + {}^{1}/_{6}c - {}^{1}/_{24}d$	
Въ третьемъ „ „ „	${}^{1}/_{24}b + {}^{1}/_{2}c - {}^{1}/_{24}d$		$-{}^{1}/_{24}b + {}^{1}/_{2}c + {}^{1}/_{24}d$	
Въ четвертомъ „ „ „	$-{}^{1}/_{24}b + {}^{1}/_{6}c + {}^{3}/_{8}d$		${}^{1}/_{24}b - {}^{1}/_{6}c + {}^{5}/_{8}d$	

Какъ выяснилось изъ пробъ, лучшіе результаты дастъ комбинація итоговъ a, b, c, d, представляющихъ умершихъ соотвѣтственно на второмъ, третьемъ, четвертомъ и пятомъ году жизни. Въ этомъ случаѣ искомыя основныя совокупности по третьему году жизни будутъ опредѣляться тѣми формулами, которыя относятся къ указанному выше второму годовому промежутку, то есть выраженіями:

$${}^{5}/_{8}b - {}^{1}/_{6}c + {}^{1}/_{24}d. \quad . \quad . \quad . \quad (18) \qquad {}^{3}/_{8}b + {}^{1}/_{6}c - {}^{1}/_{24}d. \quad . \quad . \quad (19)$$

§ 52. Результаты вычисленія посредствомъ этихъ формулъ, а равно соотвѣтствующія наблюденныя величины для трехъ разсматриваемыхъ странъ, приведены въ нижеслѣдующей таблицѣ:

Ц А VIII.

л а н д і я.				Н о р в е г і я.				
совокупн.	Разность между вычисл и наблюденіемъ.		Число умершихъ отъ 2 до 3 л.	Основныя совокупноств.		Разность между вычисл. и наблюденіемъ.		
По вычислен.	Абсолютн.	Въ % къ общ. чт. ум отъ 2 до 3 л		По наблюден.	По вычислен.	Абсолютн.	Въ % къ общ. чт. ум. отъ 2 до 3 л.	
—	—	—	428	250	226	∓ 24	∓ 5,6	
—				178	202			
—	—	—	426	235	223	∓ 12	∓ 3,0	
—				191	203			
—	—	—	380	198	197	∓ 1	∓ 0,3	
—				182	183			
—	—	—	320	175	168	∓ 7	∓ 2,2	
—				145	152			
823	∓ 34	∓ 2,2	426	248	222	∓ 26	∓ 6,1	
689				178	204			
823	∓ 69	∓ 4,5	367	210	192	∓ 18	∓ 5,0	
795				157	175			

Годы и полъ		Пруссія.					Гол	
		Число умершихъ отъ 2 до 3 л.	Основныя совокупности.		Разность между вычисл. и наблюденіемъ.		Число умершихъ отъ 2 до 3 л.	Основныя
			По наблюден.	По вычислен.	Абсолютн.	Въ % къ общ. ит. ум. отъ 2 до 2 л		По наблюден.
1881	м.	14486	7426 7060	7696 6790	±270	± 1,9	1321	759 562
	ж.	14292	7425 6867	7631 6661	±206	± 1,4	1331	779 552
1882	м.	13103	7117 5986	6947 6156	∓170	∓ 1.3	1269	714 555
	ж.	12740	6913 5837	6758 5982	∓155	∓ 1,2	1260	726 534
1883	м.	14377	7903 6474	7736 6641	∓167	∓ 1,1	1401	808 593
	ж.	14000	7774 6226	7557 6443	∓217	∓ 1,6	1412	815 597
1884	м.	14770	7711 7059	7910 6860	±199	± 1,4	1700	1037 663
	ж.	14485	7619 6866	7737 6748	±118	± 0,8	1625	964 661
1885	м.	14460	7993 6497	7753 6707	∓210	∓ 1,5	1437	781 656
	ж.	13972	7686 6286	7558 6414	∓128	∓ 0,9	1441	798 643
1886	м.	12713	6649 6064	6835 5878	∓186	∓ 1,5	1574	928 646
	ж.	12217	6392 5825	6550 5667	±158	± 1,3	1483	866 617
1887	м.	—	—	—	—	—	1347	738 609
	ж.	—	—	—	—	—	1295	693 602
1888	м.	—	—	—	—	—	1328	748 580
	ж.	—	—	—	—	—	1258	686 572

Англія			Норвегія.				
совокуи.	Разность между вычисл и наблюденіемъ.		Число умершихъ отъ 2 до 3 л.	Основныя совокупности.		Разность между вычисл. и наблюденіемъ	
По вычислен-	Абсолютн.	Въ % къ общ. нт ум. отъ 2 до 3 л.		По наблюдон.	По вычислен.	Абсолютн.	Въ % къ общ. нт. ум. отъ 2 до 3 л.
710 611	∓ 49	∓ 3,7	513	277 236	266 247	∓ 11	∓ 2,1
722 609	∓ 57	∓ 4,3	512	222 886	264 248	∓ 22	∓ 4·3
676 593	∓ 38	∓ 3,0	720	401 319	375 345	∓ 26	∓ 3,6
681 579	∓ 45	∓ 3,6	702	377 328	362 340	∓ 15	∓ 2,1
744 657	∓ 64	∓ 4,6	600	320 280	309 291	∓ 11	∓ 1,8
761 651	∓ 54	∓ 3,8	529	290 239	272 257	∓ 18	∓ 3,4
915 785	∓ 122	∓ 7,2	523	280 243	271 252	∓ 9	∓ 1.7
876 749	∓ 88	∓ 5,4	506	300 206	266 240	∓ 34	∓ 6,7
763 674	∓ 18	∓ 1,3	524	315 209	280 244	∓ 35	∓ 6,7
759 682	∓ 39	∓ 2,6	449	248 201	235 214	∓ 13	∓ 2,9
827 747	∓ 101	∓ 6,4	—	—	—	—	—
790 693	∓ 76	∓ 5,1	—	—	—	—	—
718 629	∓ 25	∓ 1,9	—	—	—	—	—
700 595	± 7	± 0,5	—	—	—	—	—
703 625	∓ 45	∓ 3,4	—	—	—	—	—
669 589	∓ 17	∓ 1,4	—	—	—	—	—

Въ общемъ согласіе между вычисленіями и наблюденіями оказывается удовлетворительнымъ. При болѣе крупныхъ числахъ, какъ въ Пруссіи, разность между обоими разрядами показаній не превосходитъ 2% соотвѣтствующаго годового итога умершихъ, при мелкихъ-же числахъ, не доходящихъ до 1,000, какъ въ Голландіи и Норвегіи, разность лишь въ рѣдкихъ случаяхъ переходитъ за 5—6%.

§ 53. Тѣ же самыя формулы (18) и (19) можно примѣнить съ достаточною степенью точности и къ вычисленію основныхъ совокупностей въ дальнѣйшихъ возрастахъ,

ТАБЛИ

Возрастъ и полъ		Пруссія.					Гол		
		Итоги главн. совокупностей 3 рода	Основныя совокупности умер въ 1886 г.		Разность между вычисл. и наблюденіемъ.		Итоги главн. совокупностей 3 рода.	Основныя умер въ	
			По наблюденію	По вычисленію	Абсолютн.	Въ % къ итогу главн. совокупн.		По наблюденію.	
3— 4	м.	8176	4070 4106	4275 3901	± 201	± 2,4	906		449 457
	ж	7998	4055 3943	4178 3820	± 123	± 1,5	844		419 425
4— 5	м.	6067	3020 3047	3212 2855	± 192	± 3,1	569		291 278
	ж.	5963	3033 2930	3171 2792	± 138	± 2,3	567		285 282
5— 6	м.	4231	2137 2094	2208 2023	± 71	± 1,7	451		235 216
	ж.	4148	2088 2060	2166 1982	± 78	± 1,9	430		223 207
6— 7	м.	3276	1616 1660	1691 1585	± 75	± 2,3	352		181 171
	ж.	3239	1592 1647	1662 1577	± 70	± 2,2	331		174 157
7— 8	м.	2633	1275 1358	1382 1251	± 107	± 4,1	279		141 138
	ж.	2727	1335 1392	1409 1318	± 74	± 2,7	260		139 121
8— 9	м.	1993	954 1039	1033 960	± 79	± 4,0	194		83 111
	ж.	2203	1110 1093	1152 1051	± 42	± 1,9	214		104 110
9—10	м.	1640	829 811	831 809	± 2	± 0,1	207		100 107
	ж.	1731	821 910	882 849	± 61	± 3,5	191		111 80
10—11	м.	1472	740 732	761 711	± 21	± 1,4	187		104 83
	ж.	1531	765 766	785 746	± 20	± 1,3	198		93 105

послѣдовательно употребляя вмѣсто a, b, c, d итоги умершихъ на третьемъ, четвертомъ, пятомъ и шестомъ году жизни, затѣмъ на четвертомъ, пятомъ, шестомъ и седьмомъ и т. д. Для примѣра приводимъ слѣдующую таблицу, которая содержитъ рядъ показаній и вычисленныхъ, и наблюденныхъ для основныхъ совокупностей въ возрастахъ выше 3-хъ лѣтъ въ календарныхъ годахъ 1886 (Пруссія), 1888 (Голландія) и 1885 (Норвегія):

ЦА IX.

л а н д і я.			Н о р в е г і я.				
совокупн. 1888 г.	Разность между вычисл и наблюденіемъ		Итоги главн. совокупностей 3 рода.	Основныя совокупности умер. въ 1885 г.		Разность между вычисл. и наблюденіемъ.	
По вычисленію.	Абсолютн.	Въ % къ итогу главн. совокупн		По наблюденію	По вычисленію.	Абсолютн.	Въ % къ итогу главн. совокупн.
489 417	± 40	± 4,0	357	208 149	187 170	± 21	∓ 6,0
450 394	± 31	± 3,7	343	200 143	184 159	∓ 16	∓ 4,6
296 273	± 5	± 1,0	273	148 125	142 131	∓ 6	∓ 2,2
296 271	± 11	± 2,0	270	141 129	138 132	∓ 3	∓ 1,1
235 216	0	0,0	226	124 102	118 108	∓ 6	∓ 2,6
225 205	± 2	± 0,5	244	128 116	125 119	∓ 3	∓ 1,2
182 170	± 1	± 0,3	183	101 82	94 89	∓ 7	∓ 3,8
172 159	∓ 2	∓ 0,6	206	114 92	109 97	∓ 5	∓ 2,4
152 127	± 11	± 4,0	164	82 82	85 79	± 3	± 1,8
135 125	∓ 4	∓ 1,5	160	91 69	83 77	± 8	± 5,0
94 100	± 11	± 5,6	132	82 50	70 62	∓ 12	∓ 9,2
110 104	± 6	± 2,9	130	67 63	66 64	∓ 1	∓ 0,8
105 102	± 3	± 2,4	107	49 58	55 52	∓ 6	∓ 5,6
93 98	∓ 18	∓ 9,4	120	61 59	60 60	∓ 1	∓ 0,8
98 89	∓ 6	∓ 3,2	107	57 50	59 48	± 2	± 1,8
101 97	± 8	± 4,0	115	58 57	58 57	0	0,0

§ 54. Опредѣливъ по указаннымъ формуламъ основныя совокупности для разныхъ возрастовъ и для разныхъ лѣтъ, мы можемъ посредствомъ сложенія тѣхъ или другихъ изъ нихъ находить какія угодно совокупности умершихъ. Въ случаѣ многочисленности найденныхъ показаній, удобнѣе всего производить сложеніе при помощи графика (черт. IV), въ клѣтки котораго занесены соотвѣтствующія совокупности. Такъ какъ формулы даютъ для основныхъ совокупностей перваго рода значенія, въ большинствѣ случаевъ уклоняющіяся отъ истинныхъ въ одну сторону, а для основныхъ совокупностей второго рода—значенія, уклоняющіяся въ другую сторону, въ чемъ можно убѣдиться изъ приведенныхъ выше данныхъ, то при складываніи основныхъ совокупностей мы всегда можемъ разсчитывать, что уклоненія будутъ отчасти взаимно уничтожаться, и такимъ образомъ уклоненіе суммы будетъ менѣе, чѣмъ сумма уклоненій слагаемыхъ.

Чтобы дать понятіе о величинѣ являющихся при этомъ уклоненій, мы опредѣ-

ТАБЛИ

Годы и полъ.		Пруссія.					Гол	
		Число родившихся.	Число достигающихъ возраста 3 лѣтъ.		Разность между вычисл. и наблюд.		Число родившихся.	Число дост возраста
			По наблюденію	По вычисленію	Абсолютн.	Въ %		По наблюденію
1876	М.	537736	383161	381029	2132	— 0,6	—	
	Ж.	510016	378300	376235	-2065	-- 0,6	—	
1877	М.	528603	376107	375131	976	— 0,3	—	
	Ж.	502894	373225	372213	—1012	— 0,3	-	
1878	М.	538988	380445	379844	— 601	— 0,2	—	
	Ж.	512154	375945	375638	— 307	— 0,1	—	
1879	М.	528069	366596	369362	+2766	+ 0,8	—	—
	Ж.	500508	362453	364150	+1697	+ 0,5	—	—
1880	М.	519006	365475	363841	—1634	— 0,5	73711	52825
	Ж.	493558	361183	360180	—1003	— 0,3	70144	52754
1881	М.	531696	367678	368915	+1237	+ 0,3	73264	54014
	Ж.	503861	364620	366451	+1831	+ 0,5	69705	53601
1882	М.	527720	364925	362219	—2706	— 0,8	75130	55339
	Ж.	500794	361281	359393	—1888	— 0,5	71324	54899
1883	М.	539861	371518	373870	+2352	+ 0,7	73957	53807
	Ж.	510989	367795	369461	+1666	+ 0,5	70145	53184
1884	М.	—	—	—	—		76316	55551
	Ж.	—	—	—	—	—	72164	54845
1885	М.	—	—	—	—	—	76081	57004
	Ж.	—	—	—	—	—	71047	55251

лили на основаніи таблицъ I, II, III и VI число лицъ, умершихъ до достиженія 3-хъ лѣтъ изъ родившихся каждаго календарнаго года, то есть главныя совокупности перваго рода для возраста отъ 0 до 3 лѣтъ относительно каждой изъ разсматриваемыхъ странъ. Изъ сравненій оказывается, что для Пруссіи абсолютныя уклоненія найденныхъ главныхъ совокупностей отъ дѣйствительной величины во всѣхъ случаяхъ получаются меньшія, чѣмъ даже уклоненія основныхъ совокупностей на первомъ году жизни. Затѣмъ для остальныхъ двухъ странъ, хотя этого обстоятельства и не замѣчается, но высшія абсолютныя значенія тѣхъ и другихъ уклоненій принадлежатъ къ числамъ одного и того же порядка. Подробные результаты вычисленій приведены въ слѣдующей таблицѣ. Но желая представить нѣсколько примѣровъ вычисленія группъ сверстниковъ, мы, вмѣсто итоговъ умершихъ, даемъ въ таблицѣ число лицъ, достигающихъ возраста 3-хъ лѣтъ, то есть разности между итогомъ родившихся и итогомъ умершихъ. Въ процентахъ къ наблюденному итогу сверстниковъ выражены и уклоненія.

Ц А Х.

л а н д і я.				Н о р в е г і я.				
игающихъ 3 лѣтъ.	Разность между вычисл. и наблюд.		Число родившихся.	Число достигающихъ возраста 3 лѣтъ.		Разность между вычисл. и наблюд.	
По вычисленію.	Абсолютн.	Въ %		По наблюденію.	По вычисленію.	Абсолютн.	Въ %
—	—	—	29459	24508	24691	+183	+0,7
—	—	—	28240	24165	24220	+ 55	+0,2
—	—	—	30348	25740	25615	—125	—0,5
—	—	—	28362	24469	24458	— 11	0,0
—	—	—	30206	25748	25713	— 35	—0,1
—	—	—	28860	25238	25144	— 94	—0,4
—	—	—	31396	26787	26609	—178	—0,7
—	—	—	29710	25800	25762	— 38	—0,1
52962	+137	+0,3	30512	25441	25698	+257	+1,0
52832	+ 78	+0,2	28803	24579	24634	+ 55	+0,2
54065	+ 51	+0,1	29756	24840	24789	— 51	—0,2
53503	— 98	—0,2	28022	23767	23728	— 39	—0,2
55258	— 81	—0,2	30361	25474	25491	+ 16	+0,1
54918	+ 19	0,0	28401	24372	24420	+ 48	+0,2
53415	—392	—0,7	—	—	—	—	
52976	—208	—0,4	—	—	—	—	—
56171	+620	+1,1	—	—	—	—	—
55351	+506	+0,9	—	—	—	—	
56452	—552	—1,0	—	—	—	—	—
54711	—540	—1,0	—	—	—	—	—

Уклоненія становятся совершенно нечувствительными, если для первыхъ двухъ лѣтъ жизни взять основныя совокупности, полученныя не на основаніи годовыхъ итоговъ умершихъ, а на основаніи мѣсячныхъ, какъ можно видѣть изъ ниже помѣщаемой таблицы для Голландіи:

ТАБЛИЦА XI.

Годъ и полъ.		Голландія.			
		Число достигающихъ возраста 3-хъ лѣтъ изъ родивш. каждаго года.		Разность между вычисл. и наблюден.	
		По наблюд.	По вычисл.	Абсолютн.	Въ %.
1880	м.	52825	52662	— 163	— 0,3
	ж.	52754	52757	+ 3	0,0
1881	м.	54014	53995	— 19	0,0
	ж.	53601	53501	— 100	— 0,2
1882	м.	55339	55510	+ 171	+ 0,3
	ж.	54899	55011	+ 112	+ 0,2
1883	м.	53807	53679	— 228	— 0,4
	ж.	53184	53154	— 30	— 0,1
1884	м.	55551	55729	+ 178	+ 0,3
	ж.	54845	54950	+ 105	+ 0,2
1885	м.	57004	56790	— 214	— 0,4
	ж.	55251	55104	— 147	— 0,3

§ 55. Для опредѣленія главныхъ совокупностей второго рода, вмѣсто складыванія отдѣльныхъ основныхъ совокупностей, можно употребить указанный выше способъ прямого ихъ вычисленія. Ограничиваясь примѣненіемъ интерполяціонной формулы, составленной на основаніи четырехъ годовыхъ итоговъ умершихъ a, b, c, d для возрастовъ съ промежутками равными одному году, мы найдемъ, что въ этомъ

случаѣ выраженія для трехъ послѣдовательныхъ главныхъ совокупностей второго рода, съ опредѣляющими промежутками равными году будутъ (формулы (11) § 37):

$$^{23}/_{12}b - {}^{4}/_{3}c + {}^{5}/_{12}d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$
$$^{5}/_{12}b + {}^{2}/_{3}c - {}^{1}/_{12}d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$
$$-{}^{1}/_{12}b + {}^{2}/_{3}c + {}^{5}/_{12}d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Для главныхъ совокупностей второго рода въ возрастѣ свыше 3-хъ лѣтъ наилучшіе результаты даетъ выраженіе (21). Сопоставленіе наблюденныхъ и вычисленныхъ по этой формулѣ итоговъ для умершихъ нѣсколькихъ календарныхъ лѣтъ въ Пруссіи, Голландіи и Норвегіи приведено въ слѣдующей таблицѣ:

ТАВЛИЦА XII.

Годъ рожденія / умершихъ и полъ.		Пруссія.				Голландія.				Норвегія.			
		Число умершихъ въ 1886 году.		Разность между выч. и наблюд.		Число умершихъ въ 1888 году.		Разность между выч. и наблюд.		Число умершихъ въ 1885 году.		Разность между выч. и наблюд.	
		По набл.	По вычис.	Абсол.	Въ %	По набл.	По вычис.	Абсол.	Въ %	По набл.	По вычис.	Абсол.	Въ %
1885	м.	—	—	—	—	1029	1111	+ 82	+ 7,4	—	—	—	—
	ж.	—	—	—	—	991	1039	+ 48	+ 4,8	—	—	—	—
1884	м.	—	—	—	—	748	720	— 28	— 3,7	—	—	—	—
	ж.	—	—	—	—	710	693	— 17	— 2,4	—	—	—	—
1883	м.	10234	10241	+ 107	+ 1,0	513	509	— 4	— 0,8	—	—	—	—
	ж.	9880	9925	+ 45	+ 0,5	505	495	— 10	— 2,0	—	—	—	—
1882	м.	7126	7100	— 26	0,3	397	399	+ 2	+ 0,5	417	434	+ 17	+ 4,1
	ж	6976	6953	— 23	— 0,3	381	378	— 3	— 0,8	401	393	— 8	2,0
1881	м.	5184	5075	— 109	— 2,1	312	316	+ 4	+ 1,2	297	312	+ 15	+ 4,8
	ж.	5018	4981	— 37	— 0,7	296	293	— 3	— 1,0	284	303	+ 19	+ 6,2
1880	м	3710	3727	+ 17	+ 0,5	221	229	+ 8	+ 3,6	249	249	0	0,0
	ж.	3652	3662	+ 10	+ 0,3	225	235	+ 10	+ 4,0	257	257	0	0,0
1879	м.	2935	2854	— 81	2,8	—	—	—	—	203	202	— 1	— 0,5
	ж.	2982	2984	+ 2	+ 0,1	—	—	—	—	230	225	— 5	— 2,2
1878	м.	2312	2292	— 20	— 0,9	—	—	—	—	164	175	+ 11	+ 7,0
	ж.	2502	2460	— 42	— 1,7	—	—	—	—	183	181	— 2	— 1,1
1877	м.	1868	1800	— 68	— 3,7	—	—	—	—	164	148	— 16	— 10,0
	ж.	1914	1944	— 30	— 1,6	—	—	—	—	136	142	+ 6	+ 4,4
1876	м.	1551	1562	+ 11	+ 0,7	—	—	—	—	99	118	+ 19	+ 19,2
	ж.	1675	1629	— 46	— 2,8	—	—	—	—	124	124	0	0,0

Какъ видимъ, для Пруссіи разницы между вычисленными и наблюденными значенія вообще незначительны и maximum не превосходитъ $3{,}7\,^0/_0$. Въ Голландіи же и Норвегіи, въ которыхъ численность главныхъ совокупностей второго рода большею частью колеблется въ предѣлахъ нѣсколькихъ сотенъ, разницы, хотя абсолютно, и не превышаютъ нѣсколькихъ десятковъ, но относительно въ нѣкоторыхъ случаяхъ достигаютъ довольно большой величины $7{,}4\,^0/_0$ (Голландіи) и даже $19{,}2\,^0/_0$ (Норвегія).

§ 56. Имѣя показанія объ основныхъ совокупностяхъ, мы можемъ находить для какого-либо времени возрастное распредѣленіе населенія. Съ этою цѣлью нужно опредѣлить сумму смертныхъ случаевъ, происшедшихъ до извѣстнаго момента времени въ составѣ родившихся каждаго календарнаго года и затѣмъ вычесть ее изъ соотвѣтствующаго годоваго итога родившихся. Найденныя остатки и дадутъ итоги живыхъ въ разныхъ послѣдовательныхъ возрастахъ черезъ годовые промежутки. Разумѣется, эти итоги не будутъ вообще совпадать съ показаніями переписи, произведенной въ то же самое время, ибо измѣненія въ населеніи происходятъ не только отъ естественной прибыли и убыли его членовъ, но и путемъ переселеній. Кромѣ того, неправильности въ обозначеніи возраста какъ при дачѣ показаній во время переписи, такъ и при регистраціи смертныхъ случаевъ, съ своей стороны способствуютъ расхожденію обоихъ родовъ свѣдѣній. Тѣмъ не менѣе, примѣненіе къ рѣшенію разсматриваемой задачи данныхъ по движенію населенія даетъ результаты довольно близкіе къ дѣйствительности, и въ случаѣ отсутствія переписей, какъ, напримѣръ, у насъ въ Россіи, является единственнымъ средствомъ для полученія искомыхъ свѣдѣній.

Относительно величины разностей между численностью возрастныхъ группъ, даваемыхъ переписью, и численностью тѣхъ же группъ, опредѣляемыхъ на основаніи свѣдѣній о родившихся и умершихъ, можно составить понятіе по нижеслѣдующей таблицѣ, въ которой помѣщено возрастное распредѣленіе населенія Пруссіи къ 1 января 1886 года на основаніи обоихъ источниковъ, причемъ показанія переписи, бывшей 3 декабря 1885 года, приведены къ началу слѣдующаго календарнаго года:

ТАБЛИЦА XIII.

Возрастъ и полъ.		Населеніе въ Пруссіи къ 1 января 1886 г.		Разность между тѣми и другими показаніями.	
		По переписи	На основаніи данныхъ о движеніи населенія.	Абсолютн.	Въ $^0/_0$.
0—1	м.	453097	456568	+ 3471	+ 0,8
	ж.	440774	445407	+ 4633	+ 1,0

Возрастъ и полъ.		Населеніе въ Пруссіи къ 1 января 1880 г.		Разность между тѣми и другими показаніями.	
		По переписи	На основаніи данныхъ о движеніи населенія.	Абсолютн.	Въ %.
1— 2	м.	384207	407090	+ 22883	+ 6,0
	ж.	379511	400382	+ 20871	+ 5,5
2— 3	м.	366950	377582	+ 10632	+ 2,9
	ж.	364223	373620	+ 9397	+ 2,6
3— 4	м.	357793	359830	+ 2037	+ 0,6
	ж.	355648	356275	+ 627	+ 0,2
4— 5	м.	346862	354773	+ 7911	+ 2,3
	ж.	342137	351585	+ 9448	+ 2,8
5— 6	м.	340376	346812	+ 6436	+ 1,9
	ж.	338956	343823	+ 4867	+ 1.4
6— 7	м.	353434	343788	— 9646	— 2,7
	ж	349077	340068	— 9009	— 2,6
7— 8	м.	334852	353155	+ 18303	+ 5,5
	ж.	333875	350026	+ 16151	+ 4,8
8— 9	м.	333902	347098	+ 13196	+ 3,9
	ж.	328914	345385	+ 16471	+ 5,0
1—10	м.	334651	351789	+ 17138	+ 5,1
	ж.	332809	346894	+ 14085	+ 4,2
10—11	м.	333789	343111	+ 9322	+ 2,8
	ж.	331570	340022	+ 8452	+ 2,6

Разница между тѣми и другими показаніями таблицы не превосходитъ 6%, причемъ во всѣхъ возрастахъ, за исключеніемъ лишь одного, замѣчается превышеніе группъ, опредѣленныхъ посредствомъ данныхъ о движеніи населенія, надъ группами, найденными путемъ переписи—обстоятельство, которое можетъ быть объяснено значительною эмиграціею изъ Пруссіи.

§ 57. Что касается вопроса о томъ, въ какой мѣрѣ близки между собою показанія о возрастномъ составѣ населенія, опредѣленныя по непосредственнымъ свѣдѣніямъ о числѣ родившихся и умершихъ и вычисленыя по нашимъ формуламъ, то отвѣтъ

ТАБЛИ

Возрастъ и полъ.		Пруссія.					Гол	
		Соотвѣтствующее число родившихся.	Возрастное распредѣленіе населенія къ 1 января 1887 г.		Разность между тѣми и другими показаніями.		Соотвѣтствующее число родившихся.	Возрастное распредѣленіе населя января
			Опредѣл. по непосредств. дан. о движ. населенія.	Опредѣл. по формуламъ.	Абсолютн.	Въ %.		Опредѣл. по непосредств. дан. о движ. населенія.
0—1	м.	556540	472470	473136	+666	+0,1	77520	67699
	ж.	528619	460569	462031	+1462	+0,3	73574	65871
1—2	м.	551680	406797	409687	+2890	+0,7	76449	60589
	ж.	522618	402112	403888	+1776	+0,4	72708	59587
2—3	м.	546842	388952	385578	3774	−0,9	77330	57796
	ж.	517559	383218	382108	−1110	−0,3	73521	57481
3—4	м.	539861	367448	369507	+2059	+0,6	76081	56555
	ж.	510989	363740	364798	+1058	+0,3	71047	54832
4—5	м.	527720	352704	350120	−2584	−0,7	76316	54325
	ж.	500794	349299	347279	−2020	−0,6	72164	53716
5—6	м.	531796	349589	350819	+1230	+0,4	73957	51917
	ж.	503861	346067	347393	+1326	+0,4	70145	51501
6—7	м.	519006	343104	341453	−1651	0,5	75130	52994
	ж.	493558	339237	338188	−1049	−0,3	71324	52545
7—8	м.	528069	340853	343299	+2446	+0,7	73264	51087
	ж.	500508	337086	338520	+1434	+0,4	69705	50835
8—9	м.	538988	350843	350488	− 355	−0,1	73711	49741
	ж.	512154	346524	346403	− 121	0,0	70144	49801
9—10	м.	528603	345231	343955	−1276	−0,4	—	—
	ж.	502894	342471	340662	−1809	−0,5	—	—
10—11	м.	537736	350227	348529	−1698	−0,5	—	—
	ж.	510016	345219	343470	−1749	−0,5	—	—

даетъ слѣдующая таблица, въ которой представлено возрастное распредѣленіе населенія до 11 лѣтъ въ Пруссіи, Голландіи и Норвегіи по обоимъ способамъ, причемъ въ основаніе разсчетовъ по формуламъ взяты данныя таблицъ I, II, III, VI, VIII и IX.

Ц А XIV.

л а н д і я.			Н о р в е г і я.				
распредѣленія къ 1 1880 г.	Разность между тѣми и другими показаніями.		Соотвѣтствующее число родившихся.	Возрастное распредѣленіе населенія къ 1 января 1886 г.		Разность между тѣми и другими показаніями.	
Опредѣл. по формуламъ.	Абсолютн.	Въ %.		Опредѣл. по непосредств. дан. о движ. населенія.	Опредѣл. по формуламъ.	Абсолютн.	Въ %
67945	+246	+ 0,4	31436	29279	29228	— 51	— 0,2
66044	+173	+ 0,3	29795	28133	28087	— 46	— 0,2
60356	—233	— 0,4	31464	27605	27688	+ 83	+ 0,3
59491	— 96	— 0,2	29555	26493	26567	+ 74	+ 0,3
58203	+407	+ 0,7	30614	26278	26216	— 62	— 0,2
57906	+425	+ 0,7	28826	25262	25250	— 12	0,0
55966	—589	— 1,1	30361	25266	25301	+ 35	+ 0,1
54261	—571	— 1,1	28401	24172	24241	+ 69	+ 0,3
54941	+616	+ 1,1	29756	24301	24256	— 45	— 0,2
54240	+524	+ 1,0	28022	23277	23230	— 47	— 0,2
51544	—373	— 0,7	30512	24559	24821	+262	+ 1,1
51255	—246	- 0,5	28803	23741	23802	+ 61	+ 0,3
52886	—108	— 0,2	31396	25555	25403	—152	— 0,6
52632	+ 87	+ 0,2	29710	24529	24560	+ 31	+ 0,1
51263	+176	+ 0,3	30206	24369	24296	— 73	— 0,3
50803	— 32	— 0,1	28860	23877	23723	—154	— 0,6
49832	+ 91	+ 0,2	30348	24242	24142	—100	— 0,4
49842	+ 41	+ 0,1	28362	22993	23025	+ 32	+ 0,1
—	—	—	29459	23071	23218	+147	+ 0,6
—	—	—	28240	22801	22858	+ 57	+ 0,3
—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—

Наибольшія разницы между показаніями обоихъ родовъ достигаетъ для Пруссіи 0,9 %, а для Голландіи и Норвегіи—1.1 %. Такъ какъ главная сумма уклоненій образуется при вычисленіи совокупностей на первомъ и второмъ году жизни, а затѣмъ уклоненія въ дальнѣйшихъ возрастахъ, съ уменьшеніемъ итоговъ умершихъ, становятся абсолютно весьма малыми и притомъ не имѣютъ постоянно одного и того же знака, то можно ожидать, что опредѣленное посредствомъ указанныхъ формулъ возрастное распредѣленіе населенія даже въ старческихъ возрастахъ окажется довольно близкимъ къ дѣйствительности.

§ 58. Результаты будутъ еще точнѣе, если вмѣсто годовыхъ итоговъ умершихъ мы употребимъ для вычисленія первоначальныхъ совокупностей показанія мѣсячныя. Въ этомъ случаѣ для Голландіи, напримѣръ, наибольшая ошибка понижается отъ 1,1 % до 0,4 %, какъ показываетъ слѣдующая таблица:

ТАБЛИЦА XV

Возрастъ и полъ.		Голландія.			
		Возрастное распредѣленіе населенія къ 1 января 1889 г.		Разность между тѣми и другими показаніями.	
		Опредѣл. по непоср. дан. о движ. нас.	Опредѣлен. по формуламъ.	Абсолютн.	Въ %.
0 — 1	м.	67699	67677	— 22	0,0
	ж.	65871	65779	— 92	— 0,1
1 — 2	м.	60589	60574	— 15	0,0
	ж.	59587	59607	+ 20	0,0
2 — 3	м.	57796	57859	+ 63	+ 0,1
	ж.	57481	57621	+ 140	+ 0,3
3 4	м.	56555	56341	— 214	— 0,4
	ж.	54832	54685	— 147	± 0,3
4 — 5	м.	54325	54493	+ 168	+ 0,3
	ж.	53716	53821	+ 105	+ 0,2

Возрастъ и полъ.		Голландія.			
		Возрастное распредѣленіе населенія къ 1 января 1889 г.		Разность между тѣми и другими показаніями.	
		Опредѣл. по непоср. дан. о движ.	Опредѣлен. по формуламъ.	Абсолютн.	Въ %.
5 — 6	м.	51917	51789	— 128	— 0,2
	ж.	51501	51471	— 30	— 0,1
6 — 7	м.	52994	53164	+ 170	+ 0,3
	ж.	52545	52657	+ 122	+ 0,2
7 — 8	м.	51087	51068	— 19	0,0
	ж.	50835	50735	— 100	— 0,2
8 — 9	м.	49741	49578	— 163	— 0,3
	ж.	49801	49806	+ 5	0,0

§ 59. Между другими задачами, къ рѣшенію которыхъ можно примѣнить выведенныя формулы, мы остановимся еще на одной— именно на опредѣленіи суммы возрастовъ для какой-либо группы разновозрастныхъ индивидуумовъ. Обыкновенно эту сумму находятъ слѣдующимъ образомъ. Данную группу раздѣляютъ на подгруппы, содержащія лицъ, возрастъ которыхъ колеблется въ узкихъ предѣлахъ, и опредѣляютъ средній возрастъ каждой подгруппы, предполагая его равнымъ средней ариѳметической величинѣ изъ высшаго и низшаго возраста ея членовъ. Напримѣръ, если мы имѣемъ подгруппы съ предѣлами возраста отъ 0 до 1, отъ 1 до 2, отъ 2 до 3 и т. д., то средній возрастъ первой подгруппы принимаютъ въ $^1/_2$, второй подгруппы въ $1^1/_2$, третьей—въ $2^1/_2$ и пр. Помноживъ затѣмъ средній возрастъ на итогъ подгруппы и сложивъ полученныя произведенія, и получаютъ искомую сумму возрастовъ. По раздѣленіи этой суммы на число членовъ группы, найдется средній ихъ возрастъ.

§ 60. Чтобы примѣнить наши формулы, положимъ, что $f(y)$ изображаетъ число лицъ въ группѣ, имѣющихъ возрастъ y. Означая черезъ $f'(y)$ производную отъ $f(y)$, мы получимъ для безконечно малаго элемента группы выраженіе $f'(y)dy$, что, по умноженіи на y, даетъ безконечно малый элементъ суммы возрастовъ—$yf'(y)dy$. Взявъ затѣмъ

отъ послѣдняго выраженія интегралъ въ желаемыхъ предѣлахъ возраста y' и y'', мы найдемъ, что сумма возрастовъ A всѣхъ членовъ группы будетъ въ тѣхъ же предѣлахъ:

$$A = \int_{y'}^{y''} yf'(y)dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

§ 61. Для примѣра опредѣлимъ сумму возрастовъ умершихъ въ теченіе какого-либо календарнаго года въ предѣлахъ отъ момента рожденія и до 100 лѣтъ. Связывая интерполяціонною формулою четыре итога умершихъ a, b, c, d, соотвѣтствующіе возрастамъ:

Отъ	0	до	10	лѣтъ.
„	10	„	25	„
„	25	„	50	„
„	50	„	100	„

мы найдемъ слѣдующую общую формулу для выраженія числа умершихъ въ функціи возраста:

$$z = -\frac{a}{54.000}(y^3 - 175y^2 + 8750y - 12500) + \frac{a+b}{28125}(y^3 - 160y^2 + 6500y - 50000)$$

$$-\frac{a+b+c}{50000}(y^3 - 135y^2 + 3750y - 25000) + \frac{a+b+c+d}{337500}(y^3 - 85y^2 + 2000y - 12500).$$

Отсюда

$$\int_0^{100} \frac{dz}{dy}\, ydy = -\frac{6250000}{162000}a + \frac{2500000}{84375}(a+b) - \frac{11250000}{150000}(a+b+c) +$$

$$+ \frac{85000000}{1012500}(a+b+c+d) = \frac{156\,250.000a + 36.250.000c + 340.000.000d}{4050000}$$

Или приблизительно,

$$\int_0^{100} \frac{dz}{dy} y\, dy = 38^3/_5\, b + 9\, c + 84\, d. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

§ 63. Мы примѣнили эту формулу къ показаніямъ объ умершихъ въ Россіи, и результаты вычисленій за нѣсколько послѣдовательныхъ лѣтъ приведены въ нижеслѣдующей таблицѣ, содержащей, кромѣ суммы прожитыхъ умершими лѣтъ, еще средній возрастъ

ихъ. Для сравненія даны также оба эти показанія, опредѣленныя по обыкновенному способу, причемъ въ основаніе вычисленій приняты группы съ слѣдующими возрастными промежутками отъ рожденія до 1 года, отъ 1 до 2 лѣтъ, отъ 2 до 3, отъ 3 до 4, отъ 4 до 5, отъ 5 до 10, отъ 10 до 15, отъ 15 до 20 и т. д.

ТАБЛИЦА XVI.

Годы и полъ.		Число умер. въ возрастѣ отъ рожденія до 100 л.	Сумма прожитыхъ умершими лѣтъ.		Разность между тѣми и другими показаніями		Средній возрастъ умершихъ.	
			Опредѣлено по обыкновенному способу.	Опредѣлено по формуламъ.	Абсолютн.	Въ %.	Опредѣлен. по обыкновенному способу.	Опредѣл. по формуламъ.
1886	м.	1370595	24563650	24980290	+ 416640	+ 1,70	17,92	18,23
	ж	1287708	25615492	26204807	+ 589315	+ 2,30	19,90	20,35
1885	м.	1452142	25245400	25374620	+ 129220	+ 0,51	17,38	17,47
	ж.	1363853	26058289	26489338	+ 431049	+ 1,65	19,11	19,42
1884	м.	1379608	25559149	25909970	+ 350821	+ 1,37	18,53	18,78
	ж.	1290919	26228644	26835002	+ 606358	+ 2,31	20,32	20,79
1883	м.	1286931	22007700	22394809	+ 387109	+ 1,75	17,10	17,40
	ж.	1214086	23035002	23587971	+ 552969	+ 2,40	18,96	19,42
1882	м.	1580369	26105761	26311354	+ 205593	+ 0,79	16,52	16,65
	ж.	1469524	26742707	27207789	+ 465082	+ 1,71	18,20	18,51

Не смотря на то, что на такомъ обширномъ промежуткѣ возрастовъ какъ 100 лѣтъ, мы взяли для составленія интерполляціонной формулы только четыре данныя, результаты нашихъ вычисленій довольно близки къ истиннымъ. Разница между тѣми и другими показаніями, для суммы лѣтъ не превосходитъ 2,40% а для среднихъ возрастовъ — 0,47 года.

§ 64. Какъ другой примѣръ мы опредѣлимъ еще сумму возрастовъ и средній возрастъ лицъ, которые вступили въ бракъ въ Россіи, имѣя не болѣе 50 лѣтъ отъ роду *).

*) Мы ограничиваемся этимъ предѣломъ, потому что въ издаваемыхъ таблицахъ не имѣется распредѣленія вступившихъ въ бракъ по возрастамъ свыше 50 лѣтъ.

Мы свяжемъ интерполяціонною формулой также четыре итога вступившихъ въ бракъ въ возрастахъ 20, 25, 35 и 50 лѣтъ. Если примемъ низшіе предѣльные возрасты для вступленія въ бракъ 18 и 16 лѣтъ за нуль, то выбранные нами итоги a, b, c, d для мущинъ и a', b', c', d' для женщинъ будутъ соотвѣтствовать слѣдующимъ возрастнымъ промежуткамъ:

Для мужчинъ.	*Для женщинъ.*
0— 2 года	0— 4 года
2— 7 лѣтъ	4— 9 лѣтъ
7—17 „	9—19 „
17—32 „	19—34 „

Формулы Лагранжа въ обоихъ случаяхъ будутъ:

$$z = -\frac{a}{2250}(y^3-56y^2+887y-3808)+\frac{a+b}{1250}(y^3-51y^2+642y-1088) -$$

$$\frac{a+b+c}{2250}(y^3-41y^2+302y-448)+\frac{a+b+c+d}{11250}(y^3-26y^2+167y-238)$$

$$z' = -\frac{a'}{2250}(y^3-62y^2+1123y-5184)+\frac{a'+b'}{1250}(y^3-57y^2+858y-2584) -$$

$$-\frac{a'+b'+c'}{2250}(y^3-47y^2+478y-1224)+\frac{a'+b'+c'+d'}{11250}(y^3-32y^2+283y-684)$$

Суммы-же возрастовъ для мужчинъ и для женщинъ получатся слѣдующія:

$$\int_0^{32}\frac{dz}{dy}ydy = -\frac{51712}{6750}a+\frac{1024}{1250}(a+b)-\frac{136192}{6750}(a+b+c)+\frac{911872}{33750}(a+b+c+d)$$

$$=\frac{(258560b+230912c+911872d)}{33750}$$

$$\int_0^{34}\frac{dz}{dy}ydy = -\frac{80342}{6750}a'+\frac{4624}{1250}(a'+b')-\frac{141032}{6750}(a'+b'+c')+\frac{982022}{33750}(a'+b'+c'+d')$$

$$=\frac{(4017710b'+276862c'+982022d')}{33750}$$

Или приблизительно:

$$\int_0^{32}\frac{dz}{dy}ydy = 7^2/_3b+6^5/_6c+27d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

$$\int_0^{34}\frac{dz'}{dy}ydy = 11^9/_{10}b'+8^1/_5c'+29^1/_{10}d' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

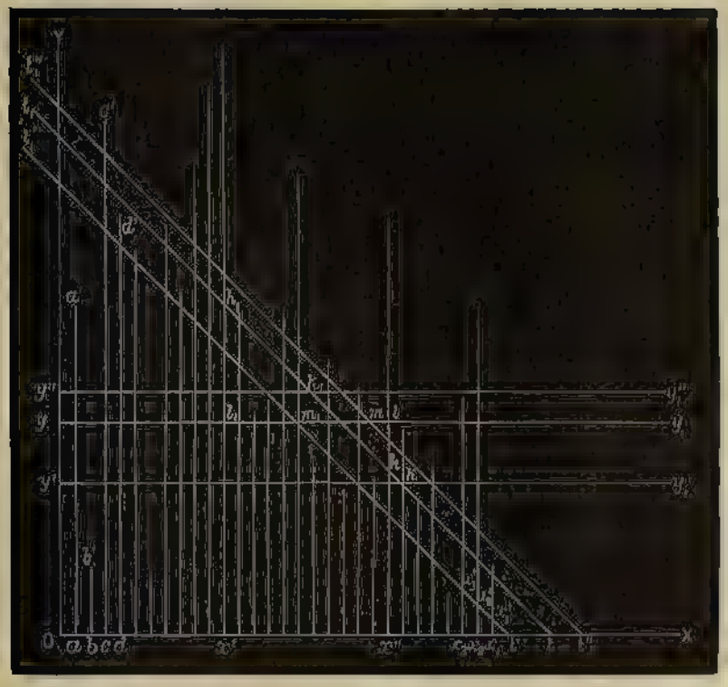
§ 65. Найдя посредствомъ этихъ формулъ сумму возрастовъ и средній возрастъ, мы должны затѣмъ прибавить къ послѣдней величинѣ 18 и 16, смотря по тому, относится ли она къ мужчинамъ или женщинамъ, а къ первой—произведеніе изъ итога вступившихъ въ бракъ на 18 или на 16. Полученные такимъ образомъ суммы возрастовъ и средніе возрасты за время съ 1886 по 1882 годъ мы приводимъ ниже вмѣстѣ съ такими же показаніями, опредѣленными обыкновеннымъ способомъ на основаніи итоговъ въ возрастъ отъ 18 или 16 до 20 лѣтъ, отъ 20 до 25, отъ 25 до 30 лѣтъ и т. д.

ТАБЛИЦА XVII.

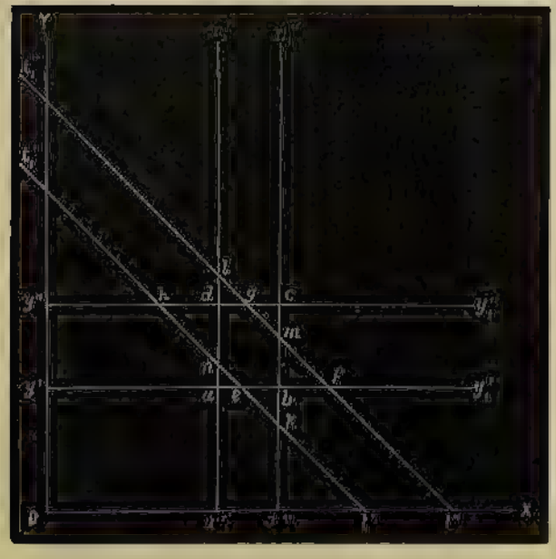
Годъ и полъ.		Число вступившихъ въ бракъ до возраста 50 лѣтъ.	Сумма возрастовъ вступившихъ въ бракъ до 50 лѣтъ.		Разность между вычисленіемъ того и другого рода.		Средній возрастъ вступившихъ въ бракъ до 50 л.	
			Вычислен. по обыкновенному способу.	Вычислен по даннымъ формуламъ.	Абсолютн.	Въ %.	Вычислен по обыкновенному способу.	Вычисл. по формул.
1886	м.	668275	16296914	16385870	+ 88956	+ 0,5	24,39	24,52
	ж.	678881	14418002	14558362	+ 140360	+ 1,0	21,24	21,44
1885	м.	668913	16313455	16399525	+ 86070	+ 0,5	24,39	24,52
	ж.	679570	14437789	14530297	+ 92508	+ 0,6	21,24	21,38
1884	м.	678516	16630799	16711841	+ 81042	+ 0,5	24,51	24,63
	ж.	689973	14791458	14902333	+ 110875	+ 0,7	21,14	21,60
1883	м.	701712	17152295	17245492	+ 93197	+ 0,5	24,44	24,57
	ж	713610	15228441	15314659	+ 88218	+ 0,6	21,34	21,46
1882	м	693621	16923680	17006672	+ 82992	+ 0,5	24,40	24,52
	ж.	704980	14992131	15047941	+ 55810	+ 0,4	21,26	21,34

Здѣсь разница среднихъ возрастовъ достигаетъ только 0,2 года или въ относительныхъ числахъ едва 1%.

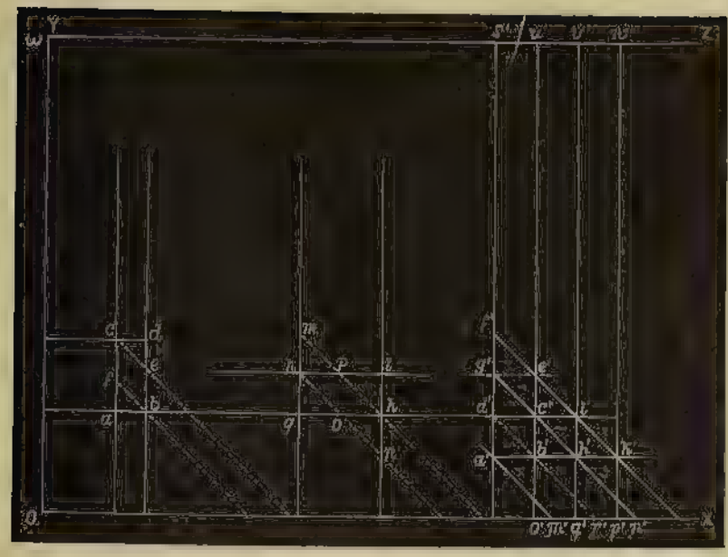
ЧЕРТ. I.



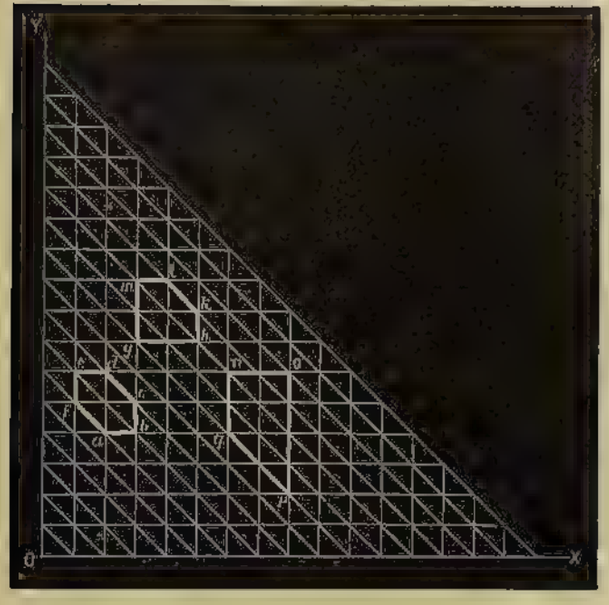
ЧЕРТ. II.



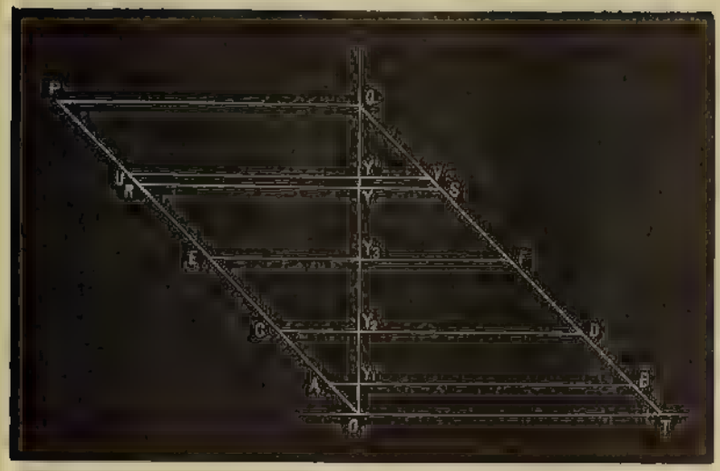
ЧЕРТ. III



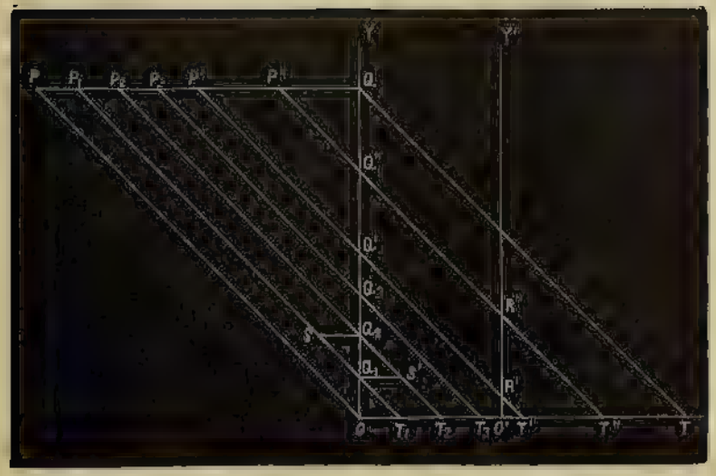
ЧЕРТ. IV



ЧЕРТ. V.



ЧЕРТ. VI



Важнѣйшія опечатки.

				Напечатано.	Должно быть
Стран.	5	Строка	7 снизу	3) $x'l'y$ 6) $x'l''y$	3) $x'l''y$ 6) $x''l''y$
»	8	»	8 сверху	для современниковъ	для сверстниковъ и современниковъ
»	11	»	2 »	l''	l''
»	22	»	2 »	рода	рода *)
»	27	»	2 »	$\frac{2-y_{n-1}}{2}l$	$\frac{2-(y_n+y_{n-1})}{2}l$
»	28	»	12 »	$(y+dy)$	$f(y+dy)$

На страницѣ 37 выраженія для M_1' должны быть

$$M_1' = -{}^{108}/_{65}a\int_0^1 (24y^3-28y^2+7y)dy+{}^{4}/_{3}(a+b)\int_0^1 (72y^3-76y^2+15y)dy-$$

$$-{}^{2}/_{5}(a+b+c)\int_0^1 (144y^3-128y^2+17y)\,dy+{}^{1}/_{2}(a+b+c+d)\int_0^1 (288y^3-160y^2+18y)\,dy$$

$$M_1' = -{}^{108}/_{630}a+{}^{4}/_{18}(a+b)-{}^{22}/_{30}(a+b+c)+{}^{85}/_{90}(a+b+c+d)$$

На страницѣ 47 въ выраженіи (8) для Іюля вмѣсто $-625\,d$ должно быть $+625\,d$.